

Étude de la vitesse de convergence de l'échantillonneur de Gibbs pour le modèle d'Ising

Amine Helali

En collaboration avec **Brice Franke**

Université de Bretagne Occidentale (LMBA)

Université Paris-Nanterre (MODAL'X)

Rencontres Doctorales Lebesgue 2018, Brest

17-10-2018

1 Introduction

2 Résultat principal

3 Discussion

Modèle d'Ising unidimensionnel

La distribution associée au modèle d'Ising unidimensionnel avec trois états est défini pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \chi$ par :

$$\pi(x) = \frac{1}{Z_T} \exp \left\{ \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbb{1}_{\{x_k = x_{k+1}\}} - \mathbb{1}_{\{x_k \neq x_{k+1}\}}) \right\}$$

Modèle d'Ising unidimensionnel

La distribution associée au modèle d'Ising unidimensionnel avec trois états est défini pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \chi$ par :

$$\pi(x) = \frac{1}{Z_T} \exp \left\{ \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbb{1}_{\{x_k=x_{k+1}\}} - \mathbb{1}_{\{x_k \neq x_{k+1}\}}) \right\}$$

- $\chi = \{c_1, c_2, c_3\}^n$: l'espace des états.

- T : la température

- $Z_T = \sum_{x \in \chi} \exp \left\{ \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbb{1}_{\{x_k=x_{k+1}\}} - \mathbb{1}_{\{x_k \neq x_{k+1}\}}) \right\}$: la constante de normalisation.

Matrice de Transition

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{n}\pi(y_i | x) & \text{si } x_j \neq y_j \text{ pour } j \neq i \\ 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{y_i \in \{c_1, c_2, c_3\}} \pi(y_i | x) & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Matrice de Transition

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{n}\pi(y_i | x) & \text{si } x_j \neq y_j \text{ pour } j \neq i \\ 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{y_i \in \{c_1, c_2, c_3\}} \pi(y_i | x) & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• où

$$\pi(y_i | x) = \frac{\pi(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\sum_{l=1}^3 \pi(x_1, \dots, x_{i-1}, c_l, x_{i+1}, \dots, x_n)}$$

Propriétés de la matrice P

- La matrice P est réversible.

Propriétés de la matrice P

- La matrice P est réversible.
- P vérifie l'équation suivante (**detailed balance equation**) :

$$Q(x, y) := \pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x) := Q(y, x) \quad \forall x, y \in \mathcal{X}.$$

Propriétés de la matrice P

- La matrice P est réversible.
- P vérifie l'équation suivante (**detailed balance equation**) :

$$Q(x, y) := \pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x) := Q(y, x) \quad \forall x, y \in \mathcal{X}.$$

- la mesure de Gibbs π est P -invariant. ie :

$$\pi P(x) = \pi(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Propriétés de la matrice P

- La matrice P est réversible.
- P vérifie l'équation suivante (**detailed balance equation**) :

$$Q(x, y) := \pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x) := Q(y, x) \quad \forall x, y \in \mathcal{X}.$$

- la mesure de Gibbs π est P -invariant. ie :

$$\pi P(x) = \pi(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

- Les valeurs propres associées à la matrice P sont définies comme suit :

$$1 = \beta_0 > \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_{|\mathcal{X}|-1} > -1.$$

Théorème (Diaconis et Stroock 1991)

Soit P une matrice réversible, π sa mesure invariante et de plus soit P irréductible alors pour tout $x \in \mathcal{X}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$4 \left\| P^k(x, \cdot) - \pi \right\|_{var}^2 = \left(\sum_{y \in \mathcal{X}} | P^k(x, y) - \pi(y) | \right)^2 \leq \frac{1 - \pi(x)}{\pi(x)} (\beta^*)^{2k}.$$

Théorème (Diaconis et Stroock 1991)

Soit P une matrice réversible, π sa mesure invariant et de plus soit P irréductible alors pour tout $x \in \mathcal{X}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$4 \left\| P^k(x, \cdot) - \pi \right\|_{var}^2 = \left(\sum_{y \in \mathcal{X}} | P^k(x, y) - \pi(y) | \right)^2 \leq \frac{1 - \pi(x)}{\pi(x)} (\beta^*)^{2k}.$$

avec $\beta^* = \max\{\beta_1, |\beta_{|\mathcal{X}|-1}|\}$

Théorème (Diaconis et Stroock 1991)

Soit P une matrice réversible, π sa mesure invariante et de plus soit P irréductible alors pour tout $x \in \mathcal{X}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$4 \left\| P^k(x, \cdot) - \pi \right\|_{var}^2 = \left(\sum_{y \in \mathcal{X}} | P^k(x, y) - \pi(y) | \right)^2 \leq \frac{1 - \pi(x)}{\pi(x)} (\beta^*)^{2k}.$$

avec $\beta^* = \max\{\beta_1, |\beta_{|\mathcal{X}|-1}|\}$

Diaconis et Stroock [1] ont donné une borne de β_1 ,

$$\beta_1 \leq 1 - \frac{1}{\kappa}$$

Théorème (Diaconis et Stroock 1991)

Soit P une matrice réversible, π sa mesure invariante et de plus soit P irréductible alors pour tout $x \in \mathcal{X}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$4 \left\| P^k(x, \cdot) - \pi \right\|_{var}^2 = \left(\sum_{y \in \mathcal{X}} | P^k(x, y) - \pi(y) | \right)^2 \leq \frac{1 - \pi(x)}{\pi(x)} (\beta^*)^{2k}.$$

avec $\beta^* = \max\{\beta_1, |\beta_{|\mathcal{X}|-1}|\}$

Diaconis et Stroock [1] ont donné une borne de β_1 ,

$$\beta_1 \leq 1 - \frac{1}{\kappa}$$

avec

$$\kappa = \max_{e \in E} Q(e)^{-1} \sum_{\gamma_{xy} \ni e} |\gamma_{xy}| \pi(x) \pi(y)$$

- $|\gamma_{xy}|$ désigne la longueur de la trajectoire γ_{xy} .

Description des trajectoires

De la même façon que Shiu et Chen (voir [5]), on définit une trajectoire pour chaque pair (x, y) donné comme suit :

Description des trajectoires

De la même façon que Shiu et Chen (voir [5]), on définit une trajectoire pour chaque pair (x, y) donné comme suit :

Pour un pair de configurations $x, y \in \chi$, il existe une suite croissante d_1, \dots, d_m telle que :

- $x_i \neq y_i$ pour $i \in \{d_1, \dots, d_m\}$
- $x_i = y_i$ sinon.

Description des trajectoires

De la même façon que Shiu et Chen (voir [5]), on définit une trajectoire pour chaque pair (x, y) donné comme suit :

Pour un pair de configurations $x, y \in \chi$, il existe une suite croissante d_1, \dots, d_m telle que :

- $x_i \neq y_i$ pour $i \in \{d_1, \dots, d_m\}$
- $x_i = y_i$ sinon.

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) &= (y_1, \dots, y_{d_1-1}, x_{d_1}, x_{d_1+1}, \dots, x_{d_2-1}, x_{d_2}, x_{d_2+1}, \dots, x_n) \\ &\rightarrow (y_1, \dots, y_{d_1-1}, y_{d_1}, x_{d_1+1}, \dots, x_{d_2-1}, x_{d_2}, x_{d_2+1}, \dots, x_n) \\ &= (y_1, \dots, y_{d_1-1}, y_{d_1}, y_{d_1+1}, \dots, y_{d_2-1}, x_{d_2}, x_{d_2+1}, \dots, x_n) \\ &\rightarrow (y_1, \dots, y_{d_1-1}, y_{d_1}, y_{d_1+1}, \dots, y_{d_2-1}, y_{d_2}, x_{d_2+1}, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ &\rightarrow (y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Borne de β_1 :

Soit $e = (e^-, e^+)$ avec

$$e^- = \{z_1, \dots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n\}$$

et

$$e^+ = \{z_1, \dots, z_{i-1}, z'_i, z_{i+1}, \dots, z_n\}.$$

Borne de β_1 :

Soit $e = (e^-, e^+)$ avec

$$e^- = \{z_1, \dots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n\}$$

et

$$e^+ = \{z_1, \dots, z_{i-1}, z'_i, z_{i+1}, \dots, z_n\}.$$

On traite le cas $i \neq \{1, n\}$. Soit $z_i = c_1$ et $z'_i = c_2$ alors la matrice de transition est :

$$Q(e) = \pi(e^-)P(e^-, e^+)$$

Borne de β_1 :

Soit $e = (e^-, e^+)$ avec

$$e^- = \{z_1, \dots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n\}$$

et

$$e^+ = \{z_1, \dots, z_{i-1}, z'_i, z_{i+1}, \dots, z_n\}.$$

On traite le cas $i \neq \{1, n\}$. Soit $z_i = c_1$ et $z'_i = c_2$ alors la matrice de transition est :

$$Q(e) = \pi(e^-)P(e^-, e^+)$$

avec

$$P(e^-, e^+) = \frac{1}{n} \frac{\exp \frac{1}{T} (\mathbb{1}_{\{z_{i-1}=c_2\}} - \mathbb{1}_{\{z_{i-1} \neq c_2\}} + \mathbb{1}_{\{c_2=z_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_2 \neq z_{i+1}\}})}{\sum_{j=1}^3 \exp \frac{1}{T} (\mathbb{1}_{\{z_{i-1}=c_j\}} - \mathbb{1}_{\{z_{i-1} \neq c_j\}} + \mathbb{1}_{\{c_j=z_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_j \neq z_{i+1}\}})}$$

Une paire de configurations (x, y) passant par e prend la forme suivante :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, c_1, z_{i+1}, \dots, z_n)$$

et

$$y = (z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, c_2, y_{i+1}, \dots, y_n).$$

Une paire de configurations (x, y) passant par e prend la forme suivante :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, c_1, z_{i+1}, \dots, z_n)$$

et

$$y = (z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, c_2, y_{i+1}, \dots, y_n).$$

Alors les mesures de probabilités associées sont :

$$\begin{aligned} \pi(x) = & \frac{1}{Z_T} \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(\sum_{k'=1}^{i-2} (\mathbb{1}_{\{x_{k'}=x_{k'+1}\}} - \mathbb{1}_{\{x_{k'} \neq x_{k'+1}\}}) \right) \right. \\ & + (\mathbb{1}_{\{x_{i-1}=c_1\}} - \mathbb{1}_{\{x_{i-1} \neq c_1\}} + \mathbb{1}_{\{c_1=z_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_1 \neq z_{i+1}\}}) \Big) \\ & \left. + \sum_{k'=i+1}^{n-1} (\mathbb{1}_{\{z_{k'}=z_{k'+1}\}} - \mathbb{1}_{\{z_{k'} \neq z_{k'+1}\}}) \right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \pi(y) = & \frac{1}{Z_T} \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(\sum_{k'=1}^{i-2} (\mathbb{1}_{\{z_{k'}=z_{k'+1}\}} - \mathbb{1}_{\{z_{k'} \neq z_{k'+1}\}}) \right) \right. \\ & + (\mathbb{1}_{\{z_{i-1}=c_2\}} - \mathbb{1}_{\{z_{i-1} \neq c_2\}} + \mathbb{1}_{\{c_2=y_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_2 \neq y_{i+1}\}}) \Big) \\ & \left. + \sum_{k'=i+1}^{n-1} (\mathbb{1}_{\{y_{k'}=y_{k'+1}\}} - \mathbb{1}_{\{y_{k'} \neq y_{k'+1}\}}) \right\}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\pi(y) = & \frac{1}{Z_T} \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(\sum_{k'=1}^{i-2} (\mathbb{1}_{\{z_{k'}=z_{k'+1}\}} - \mathbb{1}_{\{z_{k'} \neq z_{k'+1}\}}) \right) \right. \\ & + (\mathbb{1}_{\{z_{i-1}=c_2\}} - \mathbb{1}_{\{z_{i-1} \neq c_2\}} + \mathbb{1}_{\{c_2=y_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_2 \neq y_{i+1}\}}) \\ & \left. + \sum_{k'=i+1}^{n-1} (\mathbb{1}_{\{y_{k'}=y_{k'+1}\}} - \mathbb{1}_{\{y_{k'} \neq y_{k'+1}\}}) \right\}.\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\pi(e^-) = & \frac{1}{Z_T} \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(\sum_{k'=1}^{i-2} (\mathbb{1}_{\{z_{k'}=z_{k'+1}\}} - \mathbb{1}_{\{z_{k'} \neq z_{k'+1}\}}) \right) \right. \\ & + (\mathbb{1}_{\{z_{i-1}=c_1\}} - \mathbb{1}_{\{z_{i-1} \neq c_1\}} + \mathbb{1}_{\{c_1=z_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_1 \neq z_{i+1}\}}) \\ & \left. + \sum_{k'=i+1}^{n-1} (\mathbb{1}_{\{z_{k'}=z_{k'+1}\}} - \mathbb{1}_{\{z_{k'} \neq z_{k'+1}\}}) \right\}.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\pi(x)\pi(y)}{\pi(e^-)} &= \frac{1}{Z_T} \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(\sum_{k'=1}^{i-2} (\mathbb{1}_{\{x_{k'}=x_{k'+1}\}} - \mathbb{1}_{\{x_{k'} \neq x_{k'+1}\}}) + \mathbb{1}_{\{z_{i-1}=c_1\}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathbb{1}_{\{z_{i-1} \neq c_1\}} + \sum_{k'=i+1}^{n-1} (\mathbb{1}_{\{y_{k'}=y_{k'+1}\}} - \mathbb{1}_{\{y_{k'} \neq y_{k'+1}\}}) \right) \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{T} (\mathbb{1}_{\{x_{i-1}=c_1\}} - \mathbb{1}_{\{x_{i-1} \neq c_1\}} + \mathbb{1}_{\{z_{i-1}=c_2\}} - \mathbb{1}_{\{z_{i-1} \neq c_2\}} \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{1}_{\{c_2=y_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_2 \neq y_{i+1}\}}) \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\pi(x)\pi(y)}{\pi(e^-)} &= \frac{1}{Z_T} \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(\sum_{k'=1}^{i-2} (\mathbb{1}_{\{x_{k'}=x_{k'+1}\}} - \mathbb{1}_{\{x_{k'} \neq x_{k'+1}\}}) + \mathbb{1}_{\{z_{i-1}=c_1\}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathbb{1}_{\{z_{i-1} \neq c_1\}} + \sum_{k'=i+1}^{n-1} (\mathbb{1}_{\{y_{k'}=y_{k'+1}\}} - \mathbb{1}_{\{y_{k'} \neq y_{k'+1}\}}) \right) \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{T} (\mathbb{1}_{\{x_{i-1}=c_1\}} - \mathbb{1}_{\{x_{i-1} \neq c_1\}} + \mathbb{1}_{\{z_{i-1}=c_2\}} - \mathbb{1}_{\{z_{i-1} \neq c_2\}} \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{1}_{\{c_2=y_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_2 \neq y_{i+1}\}}) \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

On note par :

$$(x, c_l, y) := (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, c_l, y_{i+1}, \dots, y_{n-1}, y_n) \quad \text{pour } l \in \{1, 2, 3\}.$$

On remarque que : $\bigcup_{(x,y): \gamma_{xy} \ni e} \{(x, c_1, y), (x, c_2, y), (x, c_3, y)\} = \chi.$

Alors l'équation (1) devient :

$$\begin{aligned}
 Q(e)^{-1}\pi(x)\pi(y) &= n\pi(x, c_1, y) \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(-\mathbb{1}_{\{c_1=y_{i+1}\}} + \mathbb{1}_{\{c_1 \neq y_{i+1}\}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mathbb{1}_{\{z_{i-1}=c_2\}} - \mathbb{1}_{\{z_{i-1} \neq c_2\}} + \mathbb{1}_{\{c_2=y_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_2 \neq y_{i+1}\}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \mathbb{1}_{\{z_{i-1}=c_1\}} + \mathbb{1}_{\{z_{i-1} \neq c_1\}} \right) \right\} + n\pi(x, c_2, y) \\
 &\quad \times \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(-\mathbb{1}_{\{x_{i-1}=c_2\}} + \mathbb{1}_{\{x_{i-1} \neq c_2\}} - \mathbb{1}_{\{z_{i-1}=c_1\}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mathbb{1}_{\{z_{i-1} \neq c_1\}} + \mathbb{1}_{\{x_{i-1}=c_1\}} - \mathbb{1}_{\{x_{i-1} \neq c_1\}} - \mathbb{1}_{\{c_2=z_{i+1}\}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mathbb{1}_{\{c_2 \neq z_{i+1}\}} \right) \right\} \sum_{j=1,3} \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(\mathbb{1}_{\{z_{i-1}=c_j\}} - \mathbb{1}_{\{z_{i-1} \neq c_j\}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mathbb{1}_{\{c_j=z_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_j \neq z_{i+1}\}} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Une arrête e qui atteint le max doit satisfaire :

$$z_{i-1} = c_3 = z_{i+1}.$$

Une arrête e qui atteint le max doit satisfaire :

$$z_{i-1} = c_3 = z_{i+1}.$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} Q(e)^{-1} \pi(x) \pi(y) \leq & n \pi(x, c_1, y) \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(- \mathbb{1}_{\{c_1=y_{i+1}\}} + \mathbb{1}_{\{c_1 \neq y_{i+1}\}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathbb{1}_{\{c_2=y_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_2 \neq y_{i+1}\}} \right) \right\} \\ & + n \left(1 + e^{\frac{4}{T}} \right) \pi(x, c_2, y) \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(- \mathbb{1}_{\{x_{i-1}=c_2\}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathbb{1}_{\{x_{i-1} \neq c_2\}} + \mathbb{1}_{\{x_{i-1}=c_1\}} - \mathbb{1}_{\{x_{i-1} \neq c_1\}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Pour $l = 1, 2, 3$ on définit les sous-ensembles χ_l de χ par :

$$\chi_l := \bigcup_{(x,y): \gamma_{xy} \ni e} \{(x, c_l, y)\}.$$

Pour $l = 1, 2, 3$ on définit les sous-ensembles χ_l de χ par :

$$\chi_l := \bigcup_{(x,y): \gamma_{xy} \ni e} \{(x, c_l, y)\}.$$

Alors la somme de (2) est égale à :

$$Q(e)^{-1} \sum_{\gamma_{xy} \ni e} \pi(x)\pi(y) \leq n \sum_{w \in \chi_1} \pi(w) \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(- \mathbb{1}_{\{c_1 = w_{i+1}\}} + \mathbb{1}_{\{c_1 \neq w_{i+1}\}} \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbb{1}_{\{c_2 = w_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_2 \neq w_{i+1}\}} \right) \right\} \quad (3)$$

$$+ n(1 + e^{\frac{4}{T}}) \sum_{w \in \chi_2} \pi(w) \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(- \mathbb{1}_{\{w_{i-1} = c_2\}} \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbb{1}_{\{w_{i-1} \neq c_2\}} + \mathbb{1}_{\{w_{i-1} = c_1\}} - \mathbb{1}_{\{w_{i-1} \neq c_1\}} \right) \right\} \quad (4)$$

Calcul des sommes dans (3) et (4) :

On définit pour $k \in \{1, 2, 3\}$ les trois espaces suivants :

$$W_k = \{w \in \chi, w_i = c_1, w_{i+1} = c_k\}$$

Calcul des sommes dans (3) et (4) :

On définit pour $k \in \{1, 2, 3\}$ les trois espaces suivants :

$$W_k = \{w \in \chi, w_i = c_1, w_{i+1} = c_k\}$$

Pour toute configuration $\xi^1 \in W_1$, il $\exists!$ $\xi^2 \in W_2$ telles que :

Calcul des sommes dans (3) et (4) :

On définit pour $k \in \{1, 2, 3\}$ les trois espaces suivants :

$$W_k = \{w \in \chi, w_i = c_1, w_{i+1} = c_k\}$$

Pour toute configuration $\xi^1 \in W_1$, il $\exists!$ $\xi^2 \in W_2$ telles que :

- Si $k < i$, $\xi_k^1 = \xi_k^2$

Calcul des sommes dans (3) et (4) :

On définit pour $k \in \{1, 2, 3\}$ les trois espaces suivants :

$$W_k = \{w \in \chi, w_i = c_1, w_{i+1} = c_k\}$$

Pour toute configuration $\xi^1 \in W_1$, il $\exists!$ $\xi^2 \in W_2$ telles que :

- Si $k < i$, $\xi_k^1 = \xi_k^2$
- Si $k > i + 1$, alors :
 - Si $\xi_k^1 = c_1$ alors $\xi_k^2 = c_2$
 - Si $\xi_k^1 = c_2$ alors $\xi_k^2 = c_1$
 - Si $\xi_k^1 = c_3$ alors $\xi_k^2 = c_3$.

Calcul des sommes dans (3) et (4) :

On définit pour $k \in \{1, 2, 3\}$ les trois espaces suivants :

$$W_k = \{w \in \chi, w_i = c_1, w_{i+1} = c_k\}$$

Pour toute configuration $\xi^1 \in W_1$, il $\exists!$ $\xi^2 \in W_2$ telles que :

- Si $k < i$, $\xi_k^1 = \xi_k^2$
- Si $k > i + 1$, alors :
 - Si $\xi_k^1 = c_1$ alors $\xi_k^2 = c_2$
 - Si $\xi_k^1 = c_2$ alors $\xi_k^2 = c_1$
 - Si $\xi_k^1 = c_3$ alors $\xi_k^2 = c_3$.

De même, pour toute configuration $\xi^1 \in W_1$, il $\exists!$ $\xi^3 \in W_3$ telles que :

Calcul des sommes dans (3) et (4) :

On définit pour $k \in \{1, 2, 3\}$ les trois espaces suivants :

$$W_k = \{w \in \chi, w_i = c_1, w_{i+1} = c_k\}$$

Pour toute configuration $\xi^1 \in W_1$, il $\exists!$ $\xi^2 \in W_2$ telles que :

- Si $k < i$, $\xi_k^1 = \xi_k^2$
- Si $k > i + 1$, alors :
 - Si $\xi_k^1 = c_1$ alors $\xi_k^2 = c_2$
 - Si $\xi_k^1 = c_2$ alors $\xi_k^2 = c_1$
 - Si $\xi_k^1 = c_3$ alors $\xi_k^2 = c_3$.

De même, pour toute configuration $\xi^1 \in W_1$, il $\exists!$ $\xi^3 \in W_3$ telles que :

- Si $k < i$, $\xi_k^1 = \xi_k^3$

Calcul des sommes dans (3) et (4) :

On définit pour $k \in \{1, 2, 3\}$ les trois espaces suivants :

$$W_k = \{w \in \chi, w_i = c_1, w_{i+1} = c_k\}$$

Pour toute configuration $\xi^1 \in W_1$, il $\exists!$ $\xi^2 \in W_2$ telles que :

- Si $k < i$, $\xi_k^1 = \xi_k^2$
- Si $k > i + 1$, alors :
 - Si $\xi_k^1 = c_1$ alors $\xi_k^2 = c_2$
 - Si $\xi_k^1 = c_2$ alors $\xi_k^2 = c_1$
 - Si $\xi_k^1 = c_3$ alors $\xi_k^2 = c_3$.

De même, pour toute configuration $\xi^1 \in W_1$, il $\exists!$ $\xi^3 \in W_3$ telles que :

- Si $k < i$, $\xi_k^1 = \xi_k^3$
- Si $k > i + 1$, alors :
 - Si $\xi_k^1 = c_1$ alors $\xi_k^3 = c_3$
 - Si $\xi_k^1 = c_3$ alors $\xi_k^3 = c_1$
 - Si $\xi_k^1 = c_2$ alors $\xi_k^3 = c_2$.

Cette identification : $\xi^1 \rightarrow \xi^2$ et $\xi^1 \rightarrow \xi^3$ satisfait :

$$\pi(\xi^1) = e^{\frac{2}{T}} \pi(\xi^2) = e^{\frac{2}{T}} \pi(\xi^3).$$

Cette identification : $\xi^1 \rightarrow \xi^2$ et $\xi^1 \rightarrow \xi^3$ satisfait :

$$\pi(\xi^1) = e^{\frac{2}{T}} \pi(\xi^2) = e^{\frac{2}{T}} \pi(\xi^3).$$

Ce qui donne :

$$\sum_{w \in W_1} \pi(w) = e^{\frac{2}{T}} \sum_{w \in W_2} \pi(w) = e^{\frac{2}{T}} \sum_{w \in W_3} \pi(w). \quad (5)$$

Cette identification : $\xi^1 \rightarrow \xi^2$ et $\xi^1 \rightarrow \xi^3$ satisfait :

$$\pi(\xi^1) = e^{\frac{2}{T}} \pi(\xi^2) = e^{\frac{2}{T}} \pi(\xi^3).$$

Ce qui donne :

$$\sum_{w \in W_1} \pi(w) = e^{\frac{2}{T}} \sum_{w \in W_2} \pi(w) = e^{\frac{2}{T}} \sum_{w \in W_3} \pi(w). \quad (5)$$

De plus, on a :

$$\sum_{w \in W_1} \pi(w) + \sum_{w \in W_2} \pi(w) + \sum_{w \in W_3} \pi(w) = \frac{1}{3}. \quad (6)$$

Les équations (5) et (6) donnent :

$$\sum_{w \in \mathcal{X}_1} \pi(w) e^{\frac{1}{T} (\mathbb{1}_{\{c_1 \neq w_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_1 = w_{i+1}\}} + \mathbb{1}_{\{c_2 = w_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_2 \neq w_{i+1}\}})} = \frac{1}{3}. \quad (7)$$

Les équations (5) et (6) donnent :

$$\sum_{w \in \mathcal{X}_1} \pi(w) e^{\frac{1}{T} (\mathbb{1}_{\{c_1 \neq w_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_1 = w_{i+1}\}} + \mathbb{1}_{\{c_2 = w_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_2 \neq w_{i+1}\}})} = \frac{1}{3}. \quad (7)$$

Par des arguments similaires on obtient :

$$\sum_{w \in \mathcal{X}, w_i = c_2} \pi(w) e^{\frac{1}{T} (-\mathbb{1}_{\{w_{i-1} = c_2\}} + \mathbb{1}_{\{w_{i-1} \neq c_2\}} + \mathbb{1}_{\{w_{i-1} = c_1\}} - \mathbb{1}_{\{w_{i-1} \neq c_1\}})} = \frac{1}{3}. \quad (8)$$

Les équations (5) et (6) donnent :

$$\sum_{w \in \mathcal{X}_1} \pi(w) e^{\frac{1}{T} (\mathbb{1}_{\{c_1 \neq w_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_1 = w_{i+1}\}} + \mathbb{1}_{\{c_2 = w_{i+1}\}} - \mathbb{1}_{\{c_2 \neq w_{i+1}\}})} = \frac{1}{3}. \quad (7)$$

Par des arguments similaires on obtient :

$$\sum_{w \in \mathcal{X}, w_i = c_2} \pi(w) e^{\frac{1}{T} (-\mathbb{1}_{\{w_{i-1} = c_2\}} + \mathbb{1}_{\{w_{i-1} \neq c_2\}} + \mathbb{1}_{\{w_{i-1} = c_1\}} - \mathbb{1}_{\{w_{i-1} \neq c_1\}})} = \frac{1}{3}. \quad (8)$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} \kappa &= \max_{e \in E} Q(e)^{-1} \sum_{(x,y), \gamma_{xy} \ni e} |\gamma_{xy}| \pi(x) \pi(y) \\ &\leq \frac{n^2}{3} (2 + e^{\frac{4}{T}}). \end{aligned}$$

Cas au bord : $i = 1$ ou n

- Pour $i = 1$:

Les configurations x et e^- coïncident et le maximum est atteint pour $z_1 = c_1$ ou c_3 .

Cas au bord : $i = 1$ ou n

- Pour $i = 1$:

Les configurations x et e^- coïncident et le maximum est atteint pour $z_1 = c_1$ ou c_3 .

Ce qui donne :

$$Q(e)^{-1} \sum_{\gamma_{xy} \ni e} |\gamma_{xy}| \pi(x) \pi(y) \leq \frac{n^2}{3} (2 + e^{\frac{2}{T}}).$$

Cas au bord : $i = 1$ ou n

- Pour $i = 1$:

Les configurations x et e^- coïncident et le maximum est atteint pour $z_1 = c_1$ ou c_3 .

Ce qui donne :

$$Q(e)^{-1} \sum_{\gamma_{xy} \ni e} |\gamma_{xy}| \pi(x) \pi(y) \leq \frac{n^2}{3} (2 + e^{\frac{2}{T}}).$$

- Pour $i = n$:

Les mêmes calculs donnent un résultat similaire.

Cas au bord : $i = 1$ ou n

- Pour $i = 1$:

Les configurations x et e^- coïncident et le maximum est atteint pour $z_1 = c_1$ ou c_3 .

Ce qui donne :

$$Q(e)^{-1} \sum_{\gamma_{xy} \ni e} |\gamma_{xy}| \pi(x) \pi(y) \leq \frac{n^2}{3} (2 + e^{\frac{2}{T}}).$$

- Pour $i = n$:

Les mêmes calculs donnent un résultat similaire.

Remarque

Ce calcul est donné pour le cas où $z_i = c_1$ et $z'_i = c_2$. Evidemment on obtient le même résultat dans les autres cas, $z_i = c_1$ et $z'_i = c_3, \dots$

Théorème (Helali)

La deuxième plus grande valeur propre associée à l'algorithme de l'échantillonneur de Gibbs pour le modèle d'Ising unidimensionnel à trois états satisfait :

$$\beta_1 < 1 - 3n^{-2} \frac{e^{-\frac{4}{T}}}{1 + 2e^{-\frac{4}{T}}}$$

Théorème (Helali)

La deuxième plus grande valeur propre associée à l'algorithme de l'échantillonneur de Gibbs pour le modèle d'Ising unidimensionnel à trois états satisfait :

$$\beta_1 < 1 - 3n^{-2} \frac{e^{-\frac{4}{T}}}{1 + 2e^{-\frac{4}{T}}}$$

Théorème (Helali)

La deuxième plus grande valeur propre associée à l'algorithme de l'échantillonneur de Gibbs pour le modèle d'Ising unidimensionnel à plusieurs états satisfait

$$\beta_1 < 1 - N \times n^{-2} \frac{e^{-\frac{4}{T}}}{1 + (N - 1)e^{-\frac{4}{T}}}.$$

Borne de la plus petite valeur propre en valeur absolue

Le théorème 5.3 introduit par Ingrassia (1994) (voir [4]) donne une borne inférieure de la plus petite valeur propre :

$$\beta_{|\lambda|-1} \geq -1 + \frac{2}{1 + (c - 1)e^{\frac{\Delta}{T}}}.$$

Borne de la plus petite valeur propre en valeur absolue

Le théorème 5.3 introduit par Ingrassia (1994) (voir [4]) donne une borne inférieure de la plus petite valeur propre :

$$\beta_{|\lambda|-1} \geq -1 + \frac{2}{1 + (c - 1)e^{\frac{\Delta}{T}}}.$$

Pour le modèle d'Ising unidimensionnel, $c = 3$ et $\Delta = 2$.

Borne de la plus petite valeur propre en valeur absolue

Le théorème 5.3 introduit par Ingrassia (1994) (voir [4]) donne une borne inférieure de la plus petite valeur propre :

$$\beta_{|X|-1} \geq -1 + \frac{2}{1 + (c-1)e^{\frac{\Delta}{T}}}.$$

Pour le modèle d'Ising unidimensionnel, $c = 3$ et $\Delta = 2$. Alors :

$$\begin{aligned} |\beta_{|X|-1}| &\leq \left| -1 + \frac{2}{1 + 2e^{\frac{2}{T}}} \right| = 1 - \frac{2}{1 + 2e^{\frac{2}{T}}} < 1 - \frac{2}{e^{\frac{2}{T}} + 2e^{\frac{2}{T}}} \\ &< 1 - 3n^{-2} e^{\frac{-2}{T}} \frac{e^{\frac{-2}{T}}}{2e^{\frac{-4}{T}} + 1} = 1 - 3n^{-2} \frac{e^{\frac{-4}{T}}}{2e^{\frac{-4}{T}} + 1}. \end{aligned}$$

La borne de Chen et Shiu (2015)

Chen et Shiu (voir [5]) ont considéré une mesure de probabilité définie sur l'espace des états :

$$\mathcal{X} = \{-1, 1\}^n$$

La borne de Chen et Shiu (2015)

Chen et Shiu (voir [5]) ont considéré une mesure de probabilité définie sur l'espace des états :

$$\chi = \{-1, 1\}^n$$

Dans ce travail on a étudié tout d'abord le cas où

$$\chi = \{c_1, c_2, c_3\}^n$$

La borne de Chen et Shiu (2015)

Chen et Shiu (voir [5]) ont considéré une mesure de probabilité définie sur l'espace des états :

$$\chi = \{-1, 1\}^n$$

Dans ce travail on a étudié tout d'abord le cas où

$$\chi = \{c_1, c_2, c_3\}^n$$

puis le cas général

$$\chi = \{c_1, \dots, c_N\}^n.$$

La borne de Ingrassia (1994)

L'application de la borne de Ingrassia (voir [4]) au modèle d'Ising unidimensionnel donne :

$$\beta_1 \leq 1 - n^{-2} \left(\frac{1 + 2e^{\frac{-1}{2T}}}{3} \right)^{n-1} e^{\frac{-2}{T}}.$$

La borne de Ingrassia (1994)

L'application de la borne de Ingrassia (voir [4]) au modèle d'Ising unidimensionnel donne :

$$\beta_1 \leq 1 - n^{-2} \left(\frac{1 + 2e^{-\frac{1}{2T}}}{3} \right)^{n-1} e^{-\frac{2}{T}}.$$

Ceci diffère au résultat donné dans cet exposé par le facteur :

$$\theta = \frac{e^{\frac{2}{T}} + 2e^{-\frac{2}{T}}}{3} \left(\frac{1 + 2e^{-\frac{1}{2T}}}{3} \right)^{n-1}$$

θ est très petit pour n large car $1 + 2e^{-\frac{1}{2T}} < 3$.

Un résultat en dimension deux

- $\chi = \{-1, +1\}^{n^2}$.

Un résultat en dimension deux

- $\mathcal{X} = \{-1, +1\}^{n^2}$.
- $\pi(x) = \frac{1}{Z_T} \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-1} x_i^j x_{i+1}^j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} x_i^j x_i^{j+1} \right) \right\} \quad \forall x, y \in \mathcal{X}.$

Un résultat en dimension deux

- $\mathcal{X} = \{-1, +1\}^{n^2}$.
- $\pi(x) = \frac{1}{Z_T} \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-1} x_i^j x_{i+1}^j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} x_i^j x_i^{j+1} \right) \right\} \quad \forall x, y \in \mathcal{X}.$
- On construit la matrice P à l'aide de l'échantillonneur de Gibbs.

Un résultat en dimension deux






- $\chi = \{-1, +1\}^{n^2}$.
- $\pi(x) = \frac{1}{Z_T} \exp \left\{ \frac{1}{T} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-1} x_i^j x_{i+1}^j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} x_i^j x_i^{j+1} \right) \right\} \quad \forall x, y \in \chi.$
- On construit la matrice P à l'aide de l'échantillonneur de Gibbs.

Théorème (Franke et Helali)

La deuxième plus grande valeur propres associée à l'algorithme de l'échantillonneur de Gibbs pour le modèle d'Ising deux-dimensionnel à deux états satisfait

$$\beta_1 < 1 - n^{-4} e^{\frac{-2(2n+1)}{T}}$$

Bibliographie

-  DIACONIS AND STROOCK : *The Annals of Applied Probability*, Geometric Bounds for Eigenvalues of Markov Chain.(1991).
-  FRANKE AND HELALI :The convergence rate of the Gibbs sampler for 2–D Ising model via a geometric bound, *arXiv preprint :1804.04330*, (2018).
-  HELALI, A. :The convergence rate of the Gibbs sampler for generalized 1–D Ising model, *arXiv preprint :1804.09198*, (2018).
-  INGRASSIA, S. : *The Annals of Applied Probability*. 4, 347-389, On the rate of convergence of the metropolis algorithm and Gibbs sampler by geometric bounds.(1994).
-  SHIU AND CHEN : *Statistics and Probability Letters*, On the rate of convergence of the Gibbs sampler for the 1-D Ising model by geometric bound.(2015).

Merci de votre attention !

Questions ?