Un théorème arithmétique de Beilinson-Bernstein

Andrés Sarrazola Alzate

Université de Rennes 1

16 Octobre 2018

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'un groupe connexe et réductif $\mathbb{G}$ sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{B}$ un sous groupe de Borel, $X = \mathbb{G}/\mathbb{B}$ une variété de drapeaux et $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie d'un tore maximal $\mathbb{T}$ de $\mathbb{G}$.

Pour tout caractère $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, il existe un faisceau sur X d'algèbres non-commutatif $\mathcal{D}_\lambda$ appelé le **faisceau des opérateurs différentiels tordus**.

Théorème de Beilinson-Bernstein

Soit $\lambda \in \mathfrak{t}^*$

(i) $\Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I_\lambda =: \mathcal{U}_\lambda$.

(ii) Si λ est dominant est régulier alors

$$\{\mathcal{D}_\lambda - \text{mods. cohérents}\} \xrightarrow{\Gamma} \{\mathcal{U}_\lambda - \text{mods. de type fini}\}$$

est une équivalence des catégories.

Version $SL_2(\mathbb{C})$ de Beilinson-Bernstein

La droite projective

Nous pouvons définir la droite projective complexe via *le recouvrement affine*

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = U_0 \cup U_\infty,$$

$$U_0 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]),\ U_\infty = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[y]),\ U_0 \cap U_\infty = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, x^{-1}]).$$

Faisceau

Définition : Soit k un anneau commutatif avec unité et X un espace topologique. Nous considérons $\mathcal{C}$ comme étant la catégorie des groupes, des anneaux commutatifs ou des k-algèbres, et $\mathbf{Top}(X)$ la catégorie des ouverts de X. Un **pre-faisceau** $\mathcal{F}$ sur X est un foncteur contravariant

$$\mathcal{F} : \mathbf{Top}(X) \to \mathcal{C}$$

Si le pre-faisceau peut être défini de manière locale on l'appelle un **faisceau**.

Faisceau des fonctions différentielles

Si X est une variété différentielle alors

$$\mathcal{C}^\infty(\bullet, \mathbb{C}) : \quad \textbf{Top}(X) \quad \to \quad \mathcal{C} = \{\mathbb{C} - \text{Algèbres}\}$$

est un pre-faisceau avec les restrictions usuelles des fonctions. De plus, c'est un faisceau grâce à la nature locale de la propriété d'être indéfiniment différentiable.

Recollement

Une méthode pour définir un faisceau global $\mathcal{F}$ sur tout l'espace X, c'est de définir des faisceaux $\mathcal{F}_i$ sur un recouvrement $\{U_i\}_i$ de X et des isomorphismes sur les intersections.

Exemple

Sur la droite projective $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{O}: & \mathbf{Top}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) & \to & \mathcal{C} = \{\mathbb{C} - \text{Algèbres}\} \\ & U_0, U_\infty & \mapsto & \mathbb{C}[x], \mathbb{C}[y] \end{array}$$

est un faisceau si on recolle le long de l'intersection $U_0 \cap U_\infty$ via

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x, x^{-1}] & \to & \mathbb{C}[y, y^{-1}] \\ x & \mapsto & y \end{array}$$

Algèbres de Weyl

Sur U_0 et U_∞ nous pouvons définir les algèbres non-commutatives (appelées *algèbres de Weyl*)

$$\mathcal{D}_{-1}(U_0) := \frac{\mathbb{C}\left[x, \frac{d}{dx}\right]}{\left(\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} - 1\right)} \text{ et } \mathcal{D}_{-1}(U_\infty) := \frac{\mathbb{C}\left[y, \frac{d}{dy}\right]}{\left(\frac{d}{dy}y - y\frac{d}{dy} - 1\right)}.$$

Où x et d/dx sont considérés comme des opérateurs qui agissent sur $\mathbb{C}[x]$ respectivement par multiplication et par la dérivée usuelle d'un polynôme. De manière analogue y et d/dy sont des opérateurs sur l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[y]$.

Opérateurs différentiels sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

Nous recollons les algèbres de Weyl $\mathcal{D}(U_0)$ et $\mathcal{D}(U_\infty)$ le long de l'intersection $U_0 \cap U_\infty$ via l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\left[x, x^{-1}\right] \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathcal{D}_{-1}(U_0) & \xrightarrow{\Phi_{-1}} & \mathbb{C}\left[y, y^{-1}\right] \otimes_{\mathbb{C}[y]} \mathcal{D}_{-1}(U_\infty) \\ x & \mapsto & y^{-1} \\ \frac{d}{dx} & \mapsto & \frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy} = -y^2\frac{d}{dy} \end{array}$$

Le faisceau obtenu est appelé le *faisceau des opérateurs différentiels* sur la droite projective $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$\mathcal{D}_{-1} = (\mathcal{D}_{-1}(U_0), \mathcal{D}_{-1}(\infty), \Phi_{-1}).$$

Opérateurs différentiels tordus

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ nous allons un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\left[x, x^{-1}\right] \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathcal{D}_{-1}(U_0) & \xrightarrow{\Phi_n} & \mathbb{C}\left[y, y^{-1}\right] \otimes_{\mathbb{C}[y]} \mathcal{D}_{-1}(U_\infty) \\ x & \mapsto & y^{-1} \\ \frac{d}{dx} & \mapsto & -y^2 \frac{d}{dy} - (n+1)y \end{array}$$

En recollant le long de $U_0 \cap U_\infty$ via l'isomorphisme Φ_n, nous obtenons le faisceau des opérateurs différentiels tordus

$$\mathcal{D}_n = (\mathcal{D}_{-1}(U_0), \mathcal{D}_{-1}(\infty), \Phi_n).$$

Théorème d'équivalence de Beilinson-Bernstein

(i) $\Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{D}_n) = \mathcal{U}_n := \dfrac{\mathcal{U}(sl_2(\mathbb{C}))}{\Delta + (n+2)^2}$. Où $\Delta = (h-1)^2 + 4ef$, c'est l'opérateur de Casimir.

(ii) Si $n \geq -1$ on a une équivalence des catégories

$$\begin{array}{ccc} \{\mathcal{U}_n - \text{mods. de type fini}\} & \rightarrow & \{\mathcal{D}_n - \text{mods. cohérents}\} \\ N & \mapsto & \mathcal{L}oc(N) := \mathcal{D}_n \otimes_{\mathcal{U}_n} N \\ \Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{M}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathcal{M} \end{array}$$

Soit p un nombre premier. Tout au long de cette présentation nous allons noter par

$$\begin{array}{cccc} |.|_p : & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Z} \\ & q = \frac{p^k a}{b} & \mapsto & p^{-k} \end{array}$$

la **norme p-adique**.

L'ensemble

$$\mathbb{Z}_p = \{q \in \mathbb{Q} |\ |q|_p \leq 1\} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} |\ p \nmid b\}.$$

est un AVD avec un unique idéal maximal défini par

$$p\mathbb{Z}_p = \{q \in \mathbb{Q} \mid |\ q\ |_p < 1\} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid\ p|a \text{ et } p \nmid b\}$$

La norme p-adique satisfait l'inégalité

$$| x + y |_p \leq \max\{| x |_p, | y |_p\}.$$

$(\mathbb{Q}, | \, . \, |_p)$ est un espace normé qui n'est pas complet

Digits de Teïchmuller

Pour tout entier $1 \leq a \leq p - 1$, la suite $(x_n := a^{p^n})$ est une suite de Cauchy

$$x_{n+1} - x_n = a^{p^n}(a^{p^n(p-1)} - 1).$$

Par le théorème d'Euler-Fermat

$$| x_{n+1} - x_n |_p \leq p^{-n}.$$

Comme dans le cas usuel nous considérons la complétion par

$$\mathbb{Q}_p := \{\text{Suites de Cauchy}\}/\{\text{Suites qui convergent vers zéro}\}$$

et nous étendons la norme p-adique de manière canonique sur $\mathbb{Q}_p$.

Nos objets de base seront donc $(\mathbb{Q}_p, |.|_p)$ considéré comme un corps complet non-archimédien, l'AVD $\mathbb{Z}_p$ et son unique idéal maximal $p\mathbb{Z}_p$.

Considérons le **schéma en groupe affine** $SL_{2,\mathbb{Z}_p}$, alors

$$X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p} = U_0 \cup U_\infty$$

où

$$U_0 := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p[x]), \quad U_\infty = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p[y]) \ \ et$$

$$U_0 \cap U_\infty = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p[x, x^{-1}]).$$

On recolle le long de l'intersection via l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p[x, x^{-1}] & \to & \mathbb{Z}_p[y, y^{-1}] \\ x & \mapsto & y \end{array}$$

Opérateurs différentiels

Sur un corps de caractéristique zéro le faisceau des opérateurs différentiels satisfait des bonnes propriétés locales de finitude (localement à sections noethériennes).

Sur un AVD on peut perdre la condition de noethérianité.

- L'idéal $(\partial_x^{p^j})_{j\in\mathbb{N}}$ n'est pas un idéal de type fini dans $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}_p}}$

Opérateurs différentiels de Berthelot

Pierre Berthelot a introduit une suite d'algèbres

$$\mathcal{D}^{(0)}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}} \to \mathcal{D}^{(1)}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}} \to \ldots \to \mathcal{D}^{(m)}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}} \to \ldots \to \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}}$$

qui ont de bonnes propriétés locales de finitude (localement à sections noethériénnes)

Nous allons utiliser la notation $\partial_x = d/dx$ et $\partial_y = d/dy$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant l'algorithme de la division nous pouvons réécrire $k = q_k p^m + r$ avec $0 \leq r < p^m$. Nous Définissons par

$$\partial_x^{[k]} := \partial_x^k / k! \text{ et } \partial_x^{<k>} = q_k! \partial_x^{[k]},$$

qui sont des éléments de $\mathbb{Q}_p[x, \partial_x]$.

Algèbres de Weyl arithmétiques

Sur l'ouvert U_0 (respectivement U_∞) nous avons l'algèbre noethériénne non-commutative

$$\mathcal{D}^{(m)}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}}(U_0) := \mathbb{Z}_p[x, \partial_x, \partial_x^{[p]}, ..., \partial_x^{[p^m]}]$$

(respectivement $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}}(U_\infty)$).

Algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p}$

Rappelons que $SL_{2,\mathbb{Z}_p}$ a pour algèbre de Lie, l'algèbre de Lie des matrices de trace égale zéro.

$$\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p} := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p \text{ et } a - d = 0 \right\}$$

munie du crochet défini par le commutateur

$$[A, B] := AB - BA.$$

C'est un $\mathbb{Z}_p$-module de rang 3 avec une base canonique donnée par les matrices suivantes :

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Algèbre enveloppante

L'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p}$ est définie par

$$\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p}) = \frac{\mathbb{Z}_p[e,f,h]}{([h,e]-2e,[h,f]+2e,[e,f]-h)}.$$

Nous avons évidement un morphisme canonique (qui est injectif par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt)

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p} & \hookrightarrow & \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p}) \\ & e,f,h & \mapsto & e,f,h. \end{array}$$

En particulier :

$$\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Q}_p}).$$

Propriété universelle

Soit A une algèbre associative avec unité et supposons que $\phi : \mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p} \to A$ est un morphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules tel que

$$\phi([A,B]) = \phi(A)\phi(B) - \phi(B)\phi(A),$$

pour tout $A, B \in \mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p}$.

Il y existe un unique morphisme d'algèbres unitaires $\hat{\phi} : \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p}) \to A$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p} & \hookrightarrow & \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p}) \\ \downarrow & \swarrow & \\ A & & \end{array}$$

Modèles entiers

Soit A une $\mathbb{Q}_p$-algèbre et A_0 une $\mathbb{Z}_p$-sous-algèbre. On dit que A_0 est un **modèle entier** de A si $A_0 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = A$.

Considérons la $\mathbb{Z}_p$-sous-algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})^{(m)}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Q}_p})$ engendrée par les éléments

$$q_1!\frac{e^{v_1}}{v_1!}q_2!\frac{(h-1)(h-2)...(h-(v_2-1))}{v_2!}q_3!\frac{f^{v_3}}{v_3!}.$$

Où $v_i = q_i p^m + r_i$ avec $0 \leq r_i < p^m$.

D'après le dernière expression nous avons

$$\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})^{(m)} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Q}_p}).$$

Vers la version arithmétique de Beilinson-Bernstein

Nous avons un morphisme canonique

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{-1}^{(m)} : & \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})^{(m)} & \rightarrow & \Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}}) \\ & e & \mapsto & -2x\partial_x = 2y\partial_y \\ & f & \mapsto & -\partial_x = y^2\partial_y \\ & h & \mapsto & x^2\partial_x = -\partial_y \end{array}$$

tel que $\Phi_{-1}^{(m)} \otimes_{\mathbb{Z}_p} id_{\mathbb{Q}_p} = \Phi_{-1}$

Complétion formelle et l'espace projectif formel

Nous notons par

$$\mathbb{Z}_p\{x\} := \varprojlim_j \mathbb{Z}_p[x]/p^j\mathbb{Z}_p[x]$$

(de manière analogue nous définissons $\mathbb{Z}_p\{y\}$), alors

$$\hat{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{Z}_p} = \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p\{x\}) \cup \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p\{y\})$$

est **l'espace projectif formel** obtenu par recollement des *schémas formels* $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p\{x, x^{-1}\})$ et $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p\{y, y^{-1}\})$ selon la relation $xy = 1$.

De manière analogue nous pouvons définir la complétion p-adique

$$\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})^{(m)} =: \varprojlim_j \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})^{(m)}/p^j\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})^{(m)}.$$

Si on passer à la complétion p-adique on a une opération fonctorielle.

Nous obtenons donc un morphisme

$$\hat{\Phi}_{-1}^{(m)} : \hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})^{(m)} \to \Gamma(\hat{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{Z}_p}, \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\hat{\mathbb{P}}_{\mathbb{Z}_p}})$$

Localement, le faisceau $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\hat{\mathbb{P}}^{(m)}_{\mathbb{Z}_p}}$ est défini par

$$\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\hat{\mathbb{P}}^{(m)}_{\mathbb{Z}_p}} = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \partial_x^{<k>} \mid a_k \in \mathbb{Z}_p\{x\} \text{ et } |a_k|_p \to 0 \right\}.$$

Finalement, si $Z(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})$ est le centre de l'algèbre enveloppant $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})$, nous notons par

$$Z(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})_+ := Z(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p}) \cap \left(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p}\mathcal{U}(\mathfrak{s}_{2,\mathbb{Z}_p})\right).$$

Théorème arithmétique de Beilinson-Bernstein

(i) Nous avons un isomorphisme

$$\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})_0^{(m)} := \frac{\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})}{Z(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})_+} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \to \Gamma\left(\hat{\mathbb{P}}_{\mathbb{Z}_p}^{(m)}, \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\hat{\mathbb{P}}^{(m)}_{\mathbb{Z}_p},\mathbb{Q}_p}\right).$$

Pour l'isomorphisme ci-dessus nous avons utilisé

$$\hat{\Gamma}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}}) \xrightarrow{\simeq} \Gamma\left(\hat{\mathbb{P}}_{\mathbb{Z}_p}^{(m)}, \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\hat{\mathbb{P}}^{(m)}_{\mathbb{Z}_p},\mathbb{Q}_p}\right),$$

qui devient d'une propriété de finitude de

$$\Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}}).$$

(ii) Le foncteur de *sections globales* induit une équivalence de catégories

$$\left\{\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})_0^{(m)} - \text{mods. de t.f}\right\} \to \left\{\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\hat{\mathbb{P}}^{(m)}_{\mathbb{Z}_p},\mathbb{Q}_p} - \text{mods. cohs}\right\}$$

$$N \mapsto \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\hat{\mathbb{P}}^{(m)}_{\mathbb{Z}_p},\mathbb{Q}_p} \bigotimes_{\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})_0^{(m)}} N$$

$$\Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}, \mathcal{M}) \leftarrow\!\shortmid \mathcal{M}.$$

Lemme clé

Soit A une $\mathbb{Z}_p$-algèbre Noethérienne, M et N deux A-modules de type fini, $u : M \to N$ une application A-linéaire, et $\hat{u} : \hat{M} \to \hat{N}$, l'application induite après complétion p-adique. Supposons que u induit un isomorphisme après tensorisation par $\mathbb{Q}_p$, alors

$$\hat{u} \otimes_{\mathbb{Z}_p} id_{\mathbb{Q}_p} : \hat{M} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \to \hat{N} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

est un isomorphisme.

calcul des sections globales

Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})^{(m)} & \xrightarrow{\Phi_{-1}^{(m)}} & \Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Q}_p}) & \xrightarrow{\Phi_{-1}} & \Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}})
\end{array}$$

puisque $Z(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Q}_p})_+ = \mathrm{Ker}(\Phi_{-1})$ et

$$Z(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Z}_p})_+ \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = Z(\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{Q}_p})_+$$

alors, le lemme précédent nous donne la partie (i).

Final

¡Muchas gracias !