Aspects de la théorie quantique des champs en espace-temps courbe

Rencontres doctorales Lebesgue Brest 2018

Christian Gérard
Département de Mathématiques
Université Paris-Sud

Théorie des champs en espace-temps courbe

- décrit des champs *quantiques* , champ de Klein-Gordon, Dirac, Maxwell etc, qui se propagent dans un espace-temps *classique* , décrit par une variété Lorentzienne (M, g).
- utilité : description de phénomènes quantiques dans des champs gravitationnels forts : modèles cosmologiques, voisinage ou intérieur d'un trou noir.
- la gravitation est traitée de manière classique : cette théorie ne peut pas être une théorie fondamentale.
- particularités : la notion d' état de vide devient problématique. nécessité d'utiliser un cadre algébrique.

L'espace-temps de Minkowski

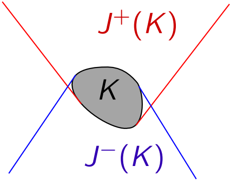
- On note $\mathbb{R}^{1,d} := \mathbb{R}^{1+d}$, muni de la forme quadratique $x \cdot x = -t^2 + \mathrm{x}^2$.
- On note

$$J^{\pm} := \{x \in M \ : \ x \cdot x \leq 0, \ \pm t > 0\},$$

le *cône de lumière futur/passé*, et pour $K \subset M$:

$$J^{\pm}(K) := K + J^{\pm}$$

le *futur/passé causal* de K.



$$J(K) = J^+(K) \cup J^-(K).$$

L'équation de Klein-Gordon

- Dans $\mathbb{R}^{1,d}$ on considère l'équation de *Klein-Gordon* :

$$(KG) : \ \Box\phi + m^2\phi = 0, \ \Box = \partial_t^2 - \Delta_{\mathrm{x}}.$$

On s'intéresse à ses solutions complexes C^∞, *compactes en espace* :

$$\mathrm{Sol}_{\mathrm{sc}}(KG) = \{\phi \in C^\infty, (\Box + m^2)\phi = 0, \ \mathrm{supp}\phi \cap \{t = t_0\} \text{ compact}\}.$$

- $\mathrm{Sol}_{\mathrm{sc}}(KG)$ est un *espace symplectique complexe* :

$$\bar{\phi}_1 \cdot \sigma\phi_2 := \int_{t=t_0} \partial_t\bar{\phi}_1\phi_2 - \bar{\phi}_1\partial_t\phi_2 d\mathrm{x}$$

est indépendant de t_0.
L'espace symplectique $(\mathrm{Sol}_{\mathrm{sc}}(KG), \sigma)$ fournit un *espace de phase classique*.

Fonctions de Green

Un résultat de base sur l'équation de Klein-Gordon est l'existence de solutions fondamentales avec conditions de *support*.
Théorème Il existe des applications linéaires uniques
$G_{\mathrm{ret/adv}} : C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{1,d})$ telles que

$$(\Box + m^2) \circ G_{\mathrm{ret/adv}} = G_{\mathrm{ret/adv}} \circ (\Box + m^2) = \mathbb{1},$$
$$\mathrm{supp}\, G_{\mathrm{ret/adv}} f \subset J^\pm(\mathrm{supp} f),\ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d}).$$

$G_{\mathrm{ret/adv}}$ sont appelés *propagateurs (ou fonctions de Green) avancés ou retardés*.
L'unicité et le fait que $\Box + m^2$ est *autoadjoint* entraînent que $(G_{\mathrm{ret/adv}})^* = G_{\mathrm{adv/ret}}$. L'opérateur $G := G_{\mathrm{ret}} - G_{\mathrm{qdv}}$, appelé *distribution de Pauli-Jordan* est *anti-autoadjoint*.

L'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d})$ comme espace symplectique

Théorème

- $\mathrm{Im}\, G = \mathrm{Sol}_{\mathrm{sc}}(KG)$, $\mathrm{Ker}\, G = (\Box + m^2) C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d})$,
- $\overline{Gu_1} \cdot \sigma G u_2 = (u_1 | G u_2), \ u_1, u_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d})$.

On en déduit que $(C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d})/(\Box + m^2) C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d}), G)$ est symplectique et que

$$G : (C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d})/(\Box + m^2) C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d}), G) \to (\mathrm{Sol}_{\mathrm{sc}}(KG), \sigma)$$

est un symplectomorphisme. On note que si $\mathrm{supp}\, u_1$ et $\mathrm{supp}\, u_2$ sont *causalement disjoints*, alors $(u_1 | G u_2) = 0$.

Algèbres CCR

On associe à chaque $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d})$ des 'opérateurs', ou champs quantiques $\psi(u)$, $\psi^*(u)$ avec les règles suivantes :

- l'application $C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d}) \ni u \mapsto \psi^*(u)$ resp. $\psi(u)$ est linéaire, resp. *anti-linéaire*.
- on a les *relations de commutation canoniques* :

$$
\begin{aligned}
&[\psi(u_1), \psi(u_2)] = [\psi^*(u_1), \psi^*(u_2)] = 0, \\
&[\psi(u_1), \psi^*(u_2)] = \mathrm{i}(u_1 | G u_2)\mathbb{1}, \ u_1, u_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d}), \\
&\psi(u)^* = \psi^*(u).
\end{aligned}
$$

- L'algèbre formelle engendrée par les $\psi^{(*)}(u)$ pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d})$ est notée $\mathrm{CCR}(KG)$. Elle s'interprète comme l'algèbre des *observables* d'un champ de Klein-Gordon.

- *localité* : si $\mathrm{supp} u_1$ et $\mathrm{supp} u_2$ sont causalement disjoints, alors $[\psi^{(*)}(u_1), \psi^{(*)}(u_2)] = 0$.

Champ de Klein-Gordon

- On note formellement

$$\psi(u) =: \int_{\mathbb{R}^{1+d}} \psi(x)\bar{u}(x)dx,$$

comme l'application $u \mapsto \psi^{(*)}(u)$ doit passer au quotient par $(\Box + m^2)C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d})$, on doit avoir

$$\psi((\Box + m^2)u) = 0 \Rightarrow (\Box + m^2)\psi(x) = 0.$$

On obtient des 'solutions à valeurs opérateurs' de l'équation de Klein-Gordon.

Etats quasi-libres

Les *états* du champ quantique de Klein-Gordon sont donnés par des fonctionnelles linéaires *positives* sur $\mathrm{CCR}(KG)$:

$$\omega : \mathrm{CCR}(KG) \to \mathbb{C}, \ \omega(A^* A) \geq 0, \ \forall A \in \mathrm{CCR}(KG), \ \omega(\mathbb{1}) = 1.$$

Une classe naturelle d'états est donnée par les *états quasi-libres*, analogues non-commutatifs des *mesures gaussiennes*.

Definition

Un état ω sur $\mathrm{CCR}(KG)$ est *quasi-libre* si :

$$\omega(\prod_1^n \psi^*(u_i) \prod_1^p \psi(v_i)) = 0, \ n \neq p,$$
$$\omega(\prod_1^n \psi^*(u_i) \prod_1^n \psi(v_i)) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_1^n \omega(\psi^*(u_i)\psi(v_{\sigma(i)})).$$

Etats quasi-libres

Les états quasi-libres sont entièrement caractérisés par leur *'fonction à deux points'* :

$$(u|\Lambda^- v) := \omega(\psi^*(v)\psi(u)), \ \ u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d}),$$

- il est utile de considérer aussi :

$$(u|\Lambda^+ v) := \omega(\psi(u)\psi^*(v)).$$

Les covariances $\Lambda^\pm$ sont des formes sesquilinéaires sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d})$, avec deux propriétés :

1) $\Lambda^+ - \Lambda^- = \mathrm{i}G$ relations de commutation

2) $\Lambda^\pm \geq 0$ positivité.

Inversement une paire de covariances $\Lambda^\pm$ vérifiant 1) et 2) détermine un unique état quasi-libre ω.

Le vide dans Minkowski

La plupart des états quasi-libres sur $\mathrm{CCR}(KG)$ n'ont pas d'intérêt physique. L'état le plus important en physique est l' *état de vide* $\omega_{\rm vac}$.

Théorème Il existe un unique état quasi-libre $\omega_{\rm vac}$ avec les propriétés suivantes :

1) $\omega_{\rm vac}$ invariant sous le groupe de Poincaré $SO^{\uparrow}(\mathbb{R}^{1,d}) \rtimes \mathbb{R}^{1+d}$.

2) $(u|\Lambda^{\pm}v) = \int_{\mathbb{R}^{1+d}\times\mathbb{R}^{1+d}} \bar{u}(x)\Lambda^{\pm}(x-y)v(y)dxdy$, avec $\hat{\Lambda}^{\pm}(\tau, k)$ supporté dans $\pm\tau > 0$ (*positivité de l'énergie*).

On a :

$$\Lambda^{\pm}(t, \mathrm{x}) = (2\pi)^{-\mathrm{d}} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{x}\cdot\mathrm{k}\pm \mathrm{t}\epsilon(\mathrm{k}))}\epsilon(\mathrm{k})^{-1}\mathrm{dk},$$

où $\epsilon(k) = (k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$, *énergie d'une particule relativiste de masse m*.

A quoi sert l'état de vide ?

- l'état de vide fournit de manière canonique :
1- un *espace de Hilbert* (lien avec la Mécanique Quantique) ;
2- une notion de particules (excitations de l'état de vide).
Espace de Hilbert : construction GNS : on équipe $\mathrm{CCR}(KG)$ du produit scalaire

$$\langle A, B\rangle := \omega_{\mathrm{vac}}(A^* B).$$

- passage au quotient et complétion $\rightarrow$ un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, avec un *vecteur distingué* $\Omega \sim \mathbb{1}$.
- L'espace $\mathcal{H}$ est un espace de Fock bosonique, construit sur un espace à une particule $\mathfrak{h}$.
-L'action des opérateurs de champ sur le vide *crée des particules*.

A quoi sert l'état de vide ?

- en travaillant sur $\mathcal{H}$ on peut :
1- construire rigoureusement des modèles en interaction en basse dimension : (Glimm-Jaffe 1970, modèles $P(\varphi)_2$, φ^4_3).
2- formuler la renormalisation perturbative :
problème emblématique : donner un sens à $\phi^2(x)$: problème ultraviolet $\sim$ multiplication de distributions.
solution : ordre de Wick : on remplace $\phi(x)\phi(y)$ par

$$\phi(x)\phi(y) - C_{\rm vac}(x,y)\mathbb{1} = :\phi(x)\phi(y):.$$

La trace sur $x = y$ est bien définie comme distribution à valeurs opérateurs sur $\mathcal{H}$.

L'effet Unruh

Le *cône de Rindler* $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}^{1,1}$ est la région $\{|t| < x\}$. Equipé de la métrique $-dt^2 + dx^2$, c'est un espace-temps.
On introduit les nouvelles coordonnées

$$T = \mathrm{argth}(\frac{t}{x}), X = \ln((x^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}) \Leftrightarrow t = \mathrm{e}^X \sinh T,\ x = \mathrm{e}^X \cosh T,$$

$\mathcal{R}$ devient $\mathbb{R}_T \times \mathbb{R}_X$ équipé de la métrique :

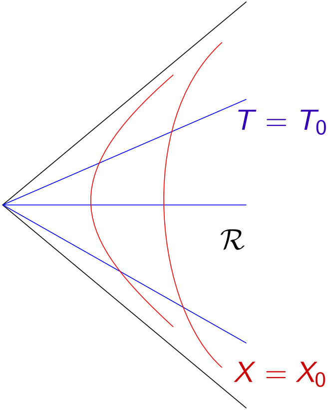
$$ds^2 = \mathrm{e}^{2X}(-dT^2 + dX^2),$$

invariante par les translations en T.
- Le boost :

$$\alpha_s = \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix},$$

dans $\mathbb{R}^{1,1}$ devient dans $\mathcal{R}$ la translation en T :
$\tilde{\alpha}_s : (T, X) \mapsto (T + s, X)$.
- La courbe $\{\tilde{\alpha}_s(T_0, X_0)\}_{s\in\mathbb{R}}$: ligne d'univers d'un observateur uniformément accéléré d'accélération e^{-X^0}.

Le cône de Rindler



- on considère la covariance de l'état de vide $\omega_{\rm vac}$:

$$\Lambda^+(t,t',x,x') = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}F(t,t',x,x',k)}\epsilon(k)^{-1}dk,$$
$$F(t,t',x,x',k) = \epsilon(k)(t-t') + k(x-x').$$

- on passe dans les coordonnées T, T', X, X' :

$$\tilde{\Lambda}^+(T,T',X,X') = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{F}(T,T',X,X',k)}\epsilon(k)^{-1}dk,$$
$$\tilde{F}(T,T',X,X',k) = (\mathrm{e}^X \sinh T - \mathrm{e}^{X'} \sinh T')\epsilon(k)$$
$$+(\mathrm{e}^X \cosh T - \mathrm{e}^{X'} \cosh T')k.$$

- invariance de $\omega_{\rm vac}$ par les boosts : invariance de $\tilde{F}$ par

$$T \mapsto T - \frac{1}{2}(T+T'),\ T' \mapsto T' - \frac{1}{2}(T+T').$$

Effet Unruh

- conclusion : $\tilde{F}(T,T',X,X') =$
$\epsilon(k)(\mathrm{e}^{X}+\mathrm{e}^{X'})\sinh\frac{1}{2}(T-T') + k(\mathrm{e}^{X}-\mathrm{e}^{X'})\cosh\frac{1}{2}(T-T')$.
- trigonométrie hyperbolique :
$\tilde{\Lambda}^{+}(T,T',X,X') = \tilde{\Lambda}^{+}(T',T+\mathrm{i}2\pi,X',X)$,
propriété qui caractérise un *état thermal* à température $(2\pi)^{-1}$.
-interprétation physique : le vide ω_{vac} est vu par un observateur accéléré d'accélération a comme un *état thermal*, à température $a/(2\pi)$.

Le cas des espaces-temps courbes

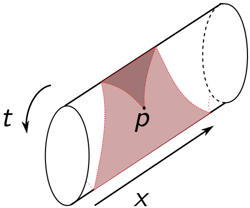
- *variété Lorentzienne* : variété M munie d'une métrique Lorentzienne g, de signature $(1, d)$.
- si $v \in T_pM$, v est de type *espace, causal, temps, lumière* si $v \cdot g_p v > 0, \leq 0, < 0, = 0$.
- on étend cette terminologie aux champs de vecteurs, puis aux courbes paramétrées C^1 par morceaux.
- (M, g) est un *espace-temps* si M est *orientable en temps*, i.e. il existe un champ de vecteur continu de type temps.
- on dit que $q \in J^{\pm}(p)$ si on peut joindre p à q par une courbe causale dirigée vers le futur/ passé. On pose pour $K \subset M$ $J^{\pm}(K) = \bigcup_{p \in K} J^{\pm}(p)$.
- une hypersurface $\Sigma \subset M$ est *de Cauchy* si toute courbe causale inextensible dans M coupe Σ en un point et un seul.

Espace-temps globalement hyperboliques

Définition (M, g) est *globalement hyperbolique*, si une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
1) M admet une hypersurface de Cauchy.
2) pour tous $p, q \in M$ $J^{+}(p) \cap J^{-}(q)$ est compact et il n'existe pas de courbes causales *fermées*.
Cette définition ne dépend que de la structure causale de (M, g).
Elle a des conséquences importantes pour l'équation de Klein-Gordon dans M :
1) le problème de Cauchy est bien posé,
2) il existe des fonctions de Green avancées et retardées.

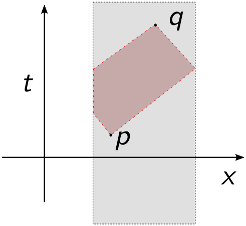
Exemples d'espaces temps non globalement hyperboliques

$$M = \mathbb{S}^1_t \times \mathbb{R}_x$$



$J^{\pm}(p) = M$

$$M = \mathbb{R}_t \times]a, b[_x$$



$J^{+}(p) \cap J^{-}(q)$ non compact

L'équation de Klein-Gordon

On suppose (M, g) globalement hyperbolique. On pose

$$P = -\nabla^a \nabla_a + m^2 = |g|^{-\frac{1}{2}} \partial_\mu g^{\mu\nu} |g|^{\frac{1}{2}} \partial_\nu + m^2,$$

l'opérateur de *Klein-Gordon* sur M. (On peut remplacer m^2 par une fonction C^∞ réelle).

P est autoadjoint pour le produit scalaire $(u|v) = \int_M \bar{u} v d\mathrm{Vol}_g$.

On note $\mathrm{Sol}_{\mathrm{sc}}(KG)$ l'espace des solutions C^∞ *compactes en espace* (l'intersection du support avec une hypersurface de type espace est compacte).

Si Σ est une hypersurface de Cauchy de type espace et $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Sol}_{\mathrm{sc}}(KG)$, la quantité :

$$\bar{\phi}_1 \cdot \sigma \phi_2 := \int_\Sigma n^\mu \partial_\mu \bar{\phi}_1 \phi_2 - \bar{\phi}_1 n^\mu \partial_\mu \phi_2 dS_g$$

est indépendante du choix de Σ, $(\mathrm{Sol}_{\mathrm{sc}} KG, \sigma)$ est un espace symplectique.

Fonctions de Green

Théorème Il existe des applications linéaires uniques $G_{\mathrm{ret/adv}} : C_0^\infty(M) \to C^\infty(M)$ telles que

$$P \circ G_{\mathrm{ret/adv}} = G_{\mathrm{ret/adv}} \circ P = \mathbb{1},$$
$$\mathrm{supp}\, G_{\mathrm{ret/adv}} f \subset J^\pm(\mathrm{supp} f),\ \ f \in C_0^\infty(M).$$

On a $(G_{\mathrm{ret/adv}})^* = G_{\mathrm{adv/ret}}$, $G := G_{\mathrm{ret}} - G_{/rmadv}$, appelé *distribution de Pauli-Jordan* est *anti-autoadjoint*.

Fonctions de Green

Théorème

- $\mathrm{Im}\, G = \mathrm{Sol}_{\mathrm{sc}}(KG)$, $\mathrm{Ker}\, G = PC_0^\infty(M)$,
- $\overline{Gu_1} \cdot \sigma G u_2 = (u_1 | G u_2)$, $u_1, u_2 \in C_0^\infty(M)$.

On en déduit que $(C_0^\infty(M)/PC_0^\infty(M), G)$ est symplectique et que

$$G : (C_0^\infty(M)/PC_0^\infty(M), G) \to (\mathrm{Sol}_{\mathrm{sc}}(KG), \sigma)$$

est un symplectomorphisme.

Etats quasi-libres

On construit l'algèbre $CCR(KG)$ comme dans le cas de Minkowski :
- Les états *quasi-libres* sur $\mathrm{CCR}(KG)$ sont donnés par des formes sesquilinéaires $\Lambda^{\pm}$ sur $C_0^{\infty}(M)$ qui passent au quotient par $PC_0^{\infty}(M)$.
- hypothèse de continuité : on suppose que $\Lambda^{\pm}$ *continues* sur $C_0^{\infty}(M)$:
- conséquence : il existe $\Lambda^{\pm} \in D'(M \times M)$ telles que :

$$
\begin{array}{rl}
1) & P_x \Lambda^{\pm}(x,y) = P_y \Lambda^{\pm}(x,y) = 0, \\
2_+) & \omega(\psi(u)\psi^*(v)) = \int_{M\times M} \Lambda^+(x,y)\bar{u}(x)v(y)dxdy, \\
2_-) & \omega(\psi^*(v)\psi(u)) = \int_{M\times M} \Lambda^-(x,y)\bar{u}(x)v(y)dxdy.
\end{array}
$$

On a encore $\Lambda^+ - \Lambda^- = \mathrm{i}G$, $\Lambda^{\pm} \geq 0$.
Conséquence importante de 1) : $\Lambda^{\pm}$ sont entièrement déterminées par leur restriction à un voisinage de $\Sigma \times \Sigma$, où $\Sigma \subset M$ est une surface de Cauchy arbitraire ("time-slice axiom").

L'effet Hawking

On considère un espace-temps (M, g) qui décrit un trou noir stationnaire.

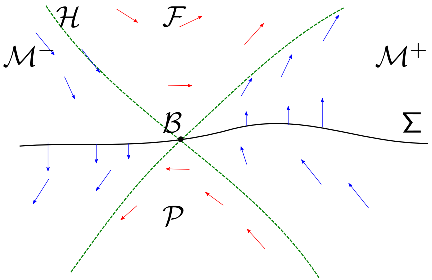
Deux caractéristiques essentielles :

(M, g) admet un champ de Killing V^a, global, complet.

Soit $\mathcal{B} = \{x \in M : V^a(x) = 0\}$ et Σ une surface de Cauchy passant par $\mathcal{B}$. On a $\Sigma = \Sigma^+ \cup \mathcal{B} \cup \Sigma^-$,

où V^a est de type temps futur/passé dans $\Sigma^\pm$. On pose $\mathcal{F} = I^+(\mathcal{B})$, $\mathcal{P} = I^-(\mathcal{B})$, $\mathcal{M}^\pm = D(\Sigma^\pm)$, $\mathcal{H} = \partial(\mathcal{F} \cup \mathcal{P})$

Trou noir stationnaire



La gravité de surface

Fait important : le scalaire κ défini par :

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^a V^b)(\nabla_a V_b)$$

est *constant* sur $\mathcal{H}$. La constante κ est appelée *gravité de surface* du trou noir.
On considère un champ libre de Klein-Gordon sur (M, g).
Question : existe t'il un état ω *invariant* par V^a et quelles sont ses propriétés ?

L'état de Hartle-Hawking

Le champ de Killing V^a est de *type temps* dans la région extérieure $\mathcal{M}^+$.
On note que $(\mathcal{M}^+, g)$ est un espace-temps globalement hyperbolique.
Théorème [Kay-Wald 1991, Sanders 2013, G 2018] : il existe un unique état ω_{HH} dans (M, g) avec les propriétés suivantes :
1) ω_{HH} est invariant par V^a, pur dans (M, g).
2) la restriction de ω_{HH} à $(\mathcal{M}^+, g)$ est un état *thermal* pour le groupe engendré par V^a à température de Hawking $T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$.
Origine de la notion de température des trous noirs (évaporation, 'black hole information paradox" etc.)

Etats de vide sur un espace-temps courbe

- sur quels espaces temps peut on définir une notion naturelle d'état de vide ?
- réponse : les espaces-temps *stationnaires*, caractérisés par l'existence d'un champ de *Killing*, global, complet, de type *temps*.
-Pb : beaucoup d'espace-temps en relativité générale ne sont pas stationnaires, par exemple l'espace-temps de *Kerr*, qui décrit un trou noir en rotation.
- Substituts pour les états de vide : états de Hadamard, caractérisés par la nature des singularités de $\Lambda^{\pm}(x, y)$ près de $x = y$ (condition de Hadamard).
- ressemblent localement à un état de vide : le tenseur d'énergie impulsion du champ peut être renormalisé.
- [Radzikowski, 1996] : définition naturelle des états de Hadamard à l'aide du front d'onde de $\Lambda^{\pm}(x, y)$.

Le front d'onde

Soit $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ une distribution.
- $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n$ n'appartient pas au front d'onde de u ($(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}(u)$) si :

$$|\widehat{\chi u}(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N}, \ \forall N \in \mathbb{N}, \xi \in \Gamma,$$

où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(x_0) = 1$, et Γ voisinage conique de ξ_0.
- Le front d'onde se transforme de manière covariante par difféomorphismes $\Rightarrow$ extension naturelle à $u \in D'(M)$, M variété lisse.
- soit $P(x, \partial_x) \in Diff^m(M)$. Le symbole principal $p(x, \xi)$ est défini de manière covariante, $\mathrm{Char(P)} = p^{-1}(\{0\})$ ensemble conique de T^*M, variété caractéristique de P.

Le front d'onde

Deux résultats de base [Hörmander 1970] :
- ellipticité microlocale : Si $Pu \in C^{\infty}(M)$, alors $\mathrm{WF}(u) \subset \mathrm{Char}(P)$.
-propagation des singularités : si $Pu \in C^{\infty}(M)$ et $p(x, \xi)$ est réel, avec $dp \neq 0$ sur $\mathrm{Char}(P)$ alors $\mathrm{WF}(u)$ est invariant par le flot hamiltonien de p.
- on peut considérer les covariances $\Lambda^{\pm}$ d'un état comme des distributions sur $M \times M$ (théorème des noyaux de Schwartz).
- si $K \in \mathcal{D}'(M \times M)$ on pose

$$\mathrm{WF}(K)' = \{((x_1, \xi_1), (x_2, -\xi_2)) \ : ((x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2)) \in \mathrm{WF}(K)\}.$$

La condition de Hadamard

On note pour $x \in M$ les cônes de lumière futur/passé par $V^{\pm}(x) \subset T_x M$.
Leurs cônes duaux $V^*_{\pm}(x) \subset T^*_x M$ sont définis par :

$$V^*_{\pm}(x) = \{\xi \in T^*_x M \ : \ \xi \cdot v > 0 \forall v \in V^{\pm}(x), v \neq 0\}.$$

Interprétation : cônes d'énergie positive/négative
$p(x, \xi) = \xi_\mu g^{\mu\nu}(x) \xi_\nu$ symbole principal de $P(x, D_x)$,
$\mathcal{N} = p^{-1}(\{0\})$ *variété caractéristique* de P
$\mathcal{N}_{\pm} = \{(x, \xi) \in \mathcal{N} \ : \ \xi \in V^*_{\pm}(x)\}$, *nappe positive/négative* de $\mathcal{N}$,
$\mathcal{N} = \mathcal{N}_+ \cup \mathcal{N}_-$, Pour $X_i = (x_i, \xi_i)$ on écrit $X_1 \sim X_2$ si $X_1, X_2 \in \mathcal{N}$, X_1, X_2 sur la même courbe hamiltonienne pour p.

La condition de Hadamard

Comme $P(x, \partial_x)\Lambda^{\pm}(x, y) = P(y, \partial_y)\Lambda^{\pm}(x, y) = 0$, on a :
1)$\mathrm{WF}(\Lambda^{\pm})' \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$,
2) $\mathrm{WF}(\Lambda^{\pm})'$ invariant par le flot hamiltonien de p séparément en x et en y.

Définition ω est un *état de Hadamard* si

$$WF(\Lambda^{\pm})' \subset \{(X_1, X_2) : X_1 \sim X_2,\ X_1 \in \mathcal{N}^{\pm}\}.$$

A quoi servent les états de Hadamard ?

Equations d'Einstein-Klein Gordon classiques :

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}(\phi), \\ -\nabla_\mu \nabla_\nu \phi + m^2 \phi = 0, \end{cases}$$

où $T_{\mu\nu}(\gamma)$ est le tenseur d'énergie-impulsion :

$$T_{\mu\nu}(\phi) = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi$$
$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(g_{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - m^2 \phi^2 \right).$$

- Si ϕ est un champ quantique, $T_{\mu\nu}(\phi)(x)$ n'est pas défini.
- mais l'ordre de Wick par rapport à un état de Hadamard ω $: T_{\mu\nu}(\phi)(x) :_\omega$ a un sens comme distribution sur M.

Les états de Hadamard

- existe t'il des états de Hadamard ?
- les états de vide et les états thermaux sur des espaces-temps stationnaires sont des états de Hadamard [Sahlman-Verch 1997].
- argument de déformation[Fulling-Narcowitch-Wald] : il existe des états de Hadamard sur tout espace-temps globalement hyperbolique.

-[G-Wrochna, 2013] : construction d'états de Hadamard par réduction à une hypersurface de Cauchy.

ingrédients : calcul pseudodifférentiel, construction de paramétrix pour le problème de Cauchy.

avantages :

1) construction plus explicite d'états de Hadamard.

2) permet de traiter des théories de gauge : champs de Maxwell et Yang-Mills linéarisés.