# Spectrum of square-tiled surfaces

Phd F.Gatse/ Director L.Hillairet

**U n i v e r s i t é d'Orléans**

17/10/2018

# Surfaces à petits carreaux

1. Soit $(P_i)_{1\leq i\leq N}$ une famille de polygones telle que

$$\forall i, \qquad P_i \simeq C = [0\,;1]^2$$

2. Soit $(h, v) \in \sigma_N^2$ tel que $< h, v >$ agisse transitivement sur $\{1, ..., N\}$.

3.




FIGURE – Principe de recollement

# Surfaces à petits carreaux

1. Soit $(P_i)_{1 \leq i \leq N}$ une famille de polygones telle que

$$\forall i, \qquad P_i \simeq C = [0\,;1]^2$$

2. Soit $(h, v) \in \sigma_N^2$ tel que $< h, v >$ agisse transitivement sur $\{1, ..., N\}$.

3. 




Figure – Principe de recollement

1. Soit $(P_i)_{1\leq i\leq N}$ une famille de polygones telle que

$$\forall i, \qquad P_i \simeq C = [0\,;1]^2$$

2. Soit $(h,v) \in \sigma_N^2$ tel que $< h, v >$ agisse transitivement sur $\{1, ..., N\}$.

3. 

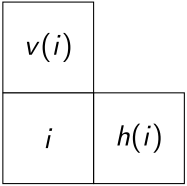



FIGURE – Principe de recollement

# Singularités

1. Les singularités représentent les sommets identifiés après recollement des carrés. L'angle d'une singularité est le nombre de tour qu'on fait autour d'un sommet avant d'y revenir.

2. 

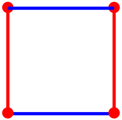
   une singularité d'angle $2\pi$ (Tore plat)

3. 
   

   une singularité d'angle $6\pi$

# Singularités

1. Les singularités représentent les sommets identifiés après recollement des carrés. L'angle d'une singularité est le nombre de tour qu'on fait autour d'un sommet avant d'y revenir.

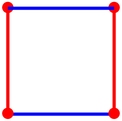
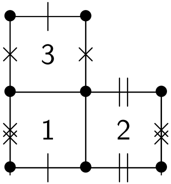
2. 

   une singularité d'angle $2\pi$ (Tore plat)

3. 

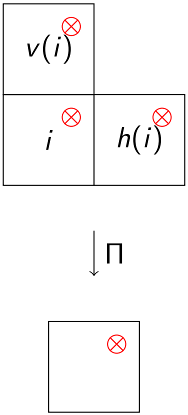

   une singularité d'angle $6\pi$

# Singularités

1. Les singularités représentent les sommets identifiés après recollement des carrés. L'angle d'une singularité est le nombre de tour qu'on fait autour d'un sommet avant d'y revenir.
2. 
   une singularité d'angle $2\pi$ (Tore plat)
3. 
   
   une singularité d'angle $6\pi$

# Revêtement non ramifié de $T^2 - \{0\}$

La définition que nous avons donnée permet de construire naturellement un revêtement non ramifié d'un origami sur $T^2 - \{0\}$. Cette construction est donnée par :



# Décomposition des origamis en cylindres et en jonctions

Le revêtement Π nous permet de recencer les directions complètement périodiques sur les surfaces à petits carreaux. L'intérêt principal de cette notion est de voir que notre objet se décompose en cylindres. On peut toutefois isoler les singularités, pour obtenir la décomposition suivante :

1. Les cylindres euclidiens

$$C^{t_i} = [0\,;1] \times \$^{it}$$

2. Les jonctions $J_k$ terminées par des "manches"

$$M^{t_i} = [0\,;t] \times \$^{it}$$

# Exemples de décompositions

Pour fixer les idées, nous explicitons la décomposition précédente dans des cas simples, mais pour la suite nous ne sommes pas obliger de donner formellement des décompositions.

1

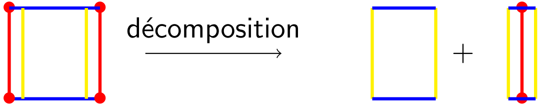



FIGURE – Tore plat

2

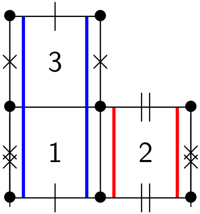
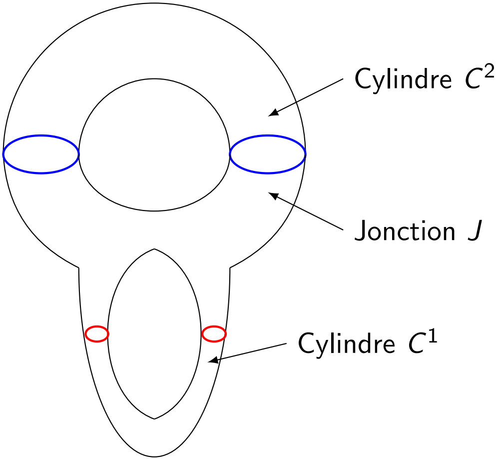



FIGURE – Origami codé par $h = (1, 2); v = (1, 3)$

# Exemples de décompositions



# Métriques associées aux cylindres et aux jonctions

1. $$\left(C^{t_i}, g = dX^2 + dY^2, dXdY\right) \Longleftrightarrow \left(C^{i}, g^{t} = dx^2 + t^2 dy^2, tdxdy\right)$$

2. $$\left(J_k^{(t_i)}, h, dm\right) \Longleftrightarrow \left(J_k^{(i)}, h^{t}, t^2 dm\right)$$

# Espaces fonctionnels associés aux cylindres et aux jonctions

$$L^2(C^i, tdxdy) \to H^1(C^i) \to q_t^i(u_i) = t\int_{C^i} |\partial_x u_i|^2 dxdy + \frac{1}{t}\int_{C^i} |\partial_y u_i|^2 dxd$$

$$n_t^i(u_i) = t\int_{C^i} |u_i|^2 dxdy$$

$$L^2(J_k^{(i)}, t^2 dm) \to H^1(J_k^{(i)}) \to q_t^{J_k^{(i)}}(v_k) = \int_{J_k^{(i)}} |\nabla v_k|^2 dm$$

$$n_t^{J_k^{(i)}}(v_k) = t^2 \int_{J_k^{(i)}} |v_k|^2 dm$$

# Espaces fonctionnels associés aux objets recollés

$$L^2 = \oplus_i L^2\left(C^i, tdxdy\right) \oplus_k L^2\left(J_k^{(i)}, t^2 dm\right)$$

$$\tilde{n}_t = \sum_i n_t^i + \sum_k n_t^{J_k^{(i)}}$$

$$H^1 = \oplus_i H^1\left(C^i\right) \oplus_k H^1\left(J_k^{(i)}\right)$$

$$\tilde{q}_t = \sum_i q_t^i + \sum_k q_t^{J_k^{(i)}}$$

La forme quadratique est definie sur $H^1$ modulo les conditions de recollement.

$$Dom(\tilde{q}_t) = \{\left((u_i), (v_k)\right) \in H^1 | \forall i, k \quad \gamma^{g_i, d_i}(u_i) = \gamma^{g_i, d_i}_{J_k^{(i)}}(v_k)\}$$

# Problème aux valeurs propres version forme quadratique

On dit que $\Theta^t = \big((u_i^t),(v_k^t)\big) \in Dom(\tilde{q}_t)$ est fonction propre de $\tilde{q}_t$ associée à la valeur propre $\lambda^t$ si $\forall \Gamma = \big((\phi_i),(\psi_k)\big) \in Dom(\tilde{q}_t)$

$$\tilde{q}_t(\Theta^t,\Gamma) = \lambda^t \tilde{n}_t(\Theta^t,\Gamma). \qquad (\tilde{E}_{vp})$$

En divisant la relation $(\tilde{E}_{vp})$ par $t$, on obtient un problème aux valeurs propres equivalent :

$$q_t(\Theta^t,\Gamma) = \lambda^t n_t(\Theta^t,\Gamma). \qquad (E_{vp})$$

# Traduction de cette équation aux valeurs propres dans les cylindres et les Jonctions

La caractérisation de l'extension de Friedrichs associée à $q_t$ permet d'avoir les relations suivantes :

$$-\Delta_k v_k^t = t^2 \lambda^t v_k^t \quad \text{dans } J_k^{(i)} \tag{1}$$

$$-\partial_x^2 u_i^t - \frac{1}{t^2}\partial_x^2 u_i^t = \lambda^t u_i^t \quad \text{dans } C^i \tag{2}$$

# Controle de la norme $L^2$

**Lemme**

$\exists C$ *tel que pour tout* $v \in H^1(V)$

$$||v||^2_{L^2(V)} \leq C\left(||\nabla v||^2_{L^2(V)} + ||v_{|\partial V}||^2_{L^2(\partial V)}\right)$$

# Controle de la norme $H^1$ de $\Theta^t$ normalisée avec l'hypothèse que le spectre est borné

En prenant $\Gamma = \Theta^t$ dans $E_{vp}$, on a :

$$\sum_i \left( \int_{C^i} |\partial_x u_i^t|^2 dxdy + \frac{1}{t^2} \int_{C^i} |\partial_y u_i^t|^2 dxdy \right) + \sum_k \frac{1}{t} \int_{J_k^{(i)}} |\nabla v_k^t|^2 dm = \lambda^t$$

$$n_t(\Theta^t) = 1 \Longleftrightarrow \sum_i \int_{C^i} |u_i^t|^2 dxdy + \sum_k t \int_{J_k^{(i)}} |v_k^t|^2 dm = 1.$$

Les deux égalités plus le principe de recollement entraînent que :

$$||\Theta^t||_{H^1} \leq C$$

# Convergence de $\Theta^t$

Banach-Alaoglu-Bourbaki+Rellich-Kondrachov nous disent que modulo une sous-suite, nous avons :

$$\Theta^t \to \Theta^\infty = \left((u_i^\infty), (v_k^\infty)\right) \quad \text{dans } L^2$$

$$\Theta^t \rightharpoonup \Theta^\infty = \left((u_i^\infty), (v_k^\infty)\right) \quad \text{dans } H^1$$

L'unicité de la limite implique que :

$$u_i^\infty = w_i^\infty(x)\mathbf{1}_{\$^i}(y) \quad \text{avec } w_i^\infty \in H^1([0\,;1]);$$

$$v_i^\infty = C\mathbf{1}_{J_k^{(i)}}$$

# Résultat principal

## Théorème

*Soit* $\left(\theta_n^t = ((u_{n,i}^t), (v_{n,k}^t)), \lambda_n^t\right)$ *un couple d'éléments propres normalisés de* $\tilde{q}_t$ *avec* $|\lambda_n^t| \leq M$.
*On montre que :* $\forall n$

$$\theta_n^t \longrightarrow \theta_n^\infty = \left((w_{n,i}^\infty(x)\mathbf{1}_{\$_i}(y)), (C\mathbf{1}_{J_k^{(i)}})\right) \quad \textit{dans } L^2 \textit{ quand } t \to 0;$$

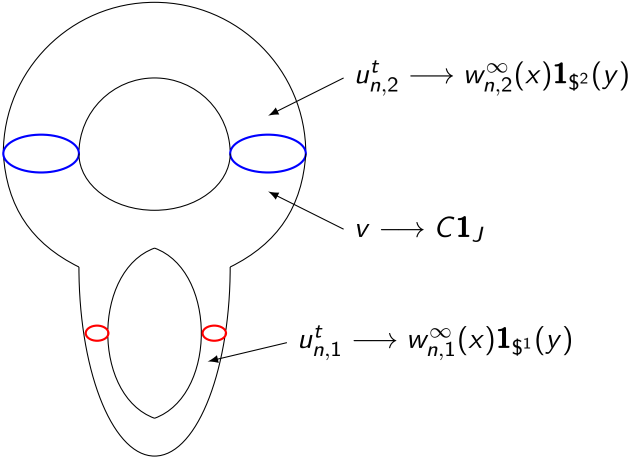
$$\lambda_n^t \to \lambda_n^\infty \quad \textit{quand } t \to 0.$$

*Avec*

$$\left(w_n^\infty = (w_{n,i}^\infty), \lambda_n^\infty\right)$$

*est un couple d'éléments propres du problème limite.*
*Remarque : Par* $t \to 0$*, on pensera à une suite* $(t_k)_k \subset [0\,;1]$ *qui tend vers* 0.

# Preuve du théorème dans le cadre de l'origami codé par $h = (1, 2)$ et $v = (1, 3)$



# Preuve du théorème dans le cadre de l'origami codé par $h = (1, 2)$ et $v = (1, 3)$

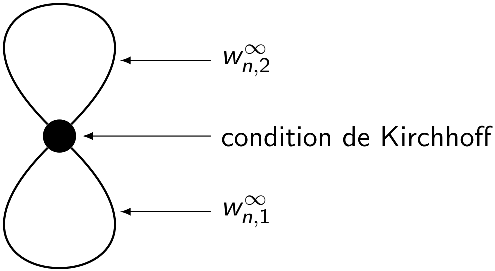



FIGURE – Graphe limite de l'origami codé par $h = (1, 2)$ et $v = (1, 3)$

# Preuve du théorème dans le cadre de l'origami codé par $h = (1,2)$ et $v = (1,3)$

A-t-on, $\forall i$

$$-(w_{n,i}^{\infty})'' = \lambda_n^{\infty} w_{n,i}^{\infty} \quad ?$$

Nous allons répondre à cette question.

# La moyenne sur les $C^i$

On définit la moyenne comme suit :

$$w_{n,i}^t(x) = \frac{1}{\sigma(\$^i)} \int_{\$^i} u_{n,i}^t(x,y)dy.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty\left((0,1)_x\right)$. On définit

$$\tilde{\varphi}(x,y) = \varphi(x)\mathbf{1}_{\$^i}(y) \in \mathcal{C}_0^\infty\left(C^i\right)$$

En multipliant la relation (2) par $\tilde{\varphi}$ et en intégrant sur $C^i$, on trouve :

$$-\left(w_{n,i}^t\right)'' = \lambda_n^t w_{n,i}^t$$

Par construction $w_{n,i}^t \to w_{n,i}^\infty$ dans $L^2([0\,;1])$ et la continuité des dérivées faibles entraîne :

$$-\left(w_{n,i}^\infty\right)'' = \lambda_n^\infty w_{n,i}^\infty$$

# Fin de la preuve ! ! !

Pour conclure que

$$\left(w_n^\infty = (w_{n,i}^\infty), \lambda_n^\infty\right)$$

est bien couple d'éléments propres du problème limite, on doit vérifier que

$$\forall i, w_{n,i}^\infty \quad \text{vérifie les conditions de recollement sur le graphe limite.}$$

Pour cela, on remarque que :

$$w_{n,i}^t(0/1) = \frac{1}{\sigma(\$^i)} \int_{\$^i} u_{n,i}^t(0/1, y)dy,$$

$$\gamma^{g_i,d_i}(w_{n,i}^t) = \frac{1}{\sigma(\$^i)} \int_{\$^i} \gamma_{J_k^{(i)}}^{g_i,d_i}(v_n^t)dy.$$

En passant à la limite, on obtient :

$$\gamma^{g_i,d_i}(w_{n,i}^\infty) = C.$$

**M E R C I POUR VOTRE ATTENTION**