Effets régularisants des semi-groupes d'Ornstein-Uhlenbeck

Paul Alphonse (IRMAR)

Rencontres Doctorales Lebesgue à Brest

Mardi 16 octobre 2018

Plan

Plan

On considère l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(Q\nabla_x^2) + \langle Bx, \nabla_x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

muni du domaine

$$D(\mathcal{L}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \mathcal{L}u \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

avec :

1. B et Q des matrices réelles de taille $n \times n$ avec Q symétrique positive,
2. $\operatorname{Tr}(Q\nabla_x^2)$ et $\langle Bx, \nabla_x\rangle$ les opérateurs différentiels respectivement définis par

$$\operatorname{Tr}(Q\nabla_x^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{i,j}\partial_{x_i}\partial_{x_j},$$

et

$$\langle Bx, \nabla_x\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{i,j}x_j\partial_{x_i}.$$

Exemples :

1. Laplacien :
$$\mathcal{L} = \Delta_x, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
obtenu pour $B = 0_n$ et $Q = 2I_n$.
2. Opérateur de Kolmogorov :
$$\mathcal{L} = \Delta_v - v \cdot \nabla_x, \quad (x, v) \in \mathbb{R}^{2n},$$
obtenu avec
$$B = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = 2\begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Quelques propriétés :

1. Domaine : $\mathcal{L}$ est un opérateur densément défini.
2. Graphe : $\mathcal{L}$ est un opérateur fermé.
3. Adjoint :
$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(Q\nabla_x^2) - \langle Bx, \nabla_x\rangle - \mathrm{Tr}(B),$$
avec domaine
$$D(\mathcal{L}^*) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{L}^* u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$
4. Signe :
$$\forall u \in D(\mathcal{L}), \quad \langle \mathcal{L}u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(B)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 0.$$

Plan

Opérateurs d'Ornstein-Uhlenbeck

Semi-groupes d'Ornstein-Uhlenbeck

Effets régularisants des semi-groupes

Estimations sous-elliptiques globales L^2

Semi-groupe :

Une famille $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est appelée un semi-groupe si $T(0)$ est l'application identité et si elle vérifie

$$\forall t, s \geq 0, \quad T(t+s) = T(t)T(s).$$

Forte continuité :

Un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est dit fortement continu si

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \lim_{t\to 0} T(t)u = u.$$

Générateur infinitésimal :

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. L'opérateur $\mathcal{P}$ défini par

$$D(\mathcal{P}) = \Big\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)u-u}{t} \text{ existe}\Big\},$$

et

$$\forall u \in D(\mathcal{P}), \quad \mathcal{P}u = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)u-u}{t},$$

est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$. Dans toute la suite, on notera $T(t) = e^{t\mathcal{P}}$ pour tout $t \geq 0$.

Une propriété :

Si $(e^{t\mathcal{P}})_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu, alors

$$\forall u \in D(\mathcal{P}), \quad \partial_t(e^{t\mathcal{P}}u) = \mathcal{P}e^{t\mathcal{P}}u = e^{t\mathcal{P}}\mathcal{P}u.$$

Semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck :

L'opérateur $\mathcal{L}$ engendre un semi-groupe fortement continu $(e^{t\mathcal{L}})_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ qui satisfont pour tout $t \geq 0$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\|e^{t\mathcal{L}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq e^{\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(B)t}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

De plus, pour tout $t \geq 0$, l'opérateur $e^{t\mathcal{L}}$ est donné par la formule de Kolmogorov :

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \widehat{e^{t\mathcal{L}}u} = e^{\operatorname{Tr}(B)t}\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t |Q^{\frac{1}{2}}e^{\tau B^T}\cdot|^2 d\tau\right]\widehat{u}(e^{tB^T}\cdot).$$

Plan

Condition de Kalman :

On dit que les matrices B et $Q^{\frac{1}{2}}$ satisfont la condition de Kalman lorsqu'il existe un entier $0 \leq r \leq n-1$ tel que

$$\mathrm{Ker}(Q^{\frac{1}{2}}) \cap \mathrm{Ker}(Q^{\frac{1}{2}}B^T) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}(Q^{\frac{1}{2}}(B^T)^r) = \{0\}.$$

Drapeau associé :

Pour tout entier $k \geq 0$, on considère l'espace vectoriel

$$V_k = \mathrm{Im}(Q^{\frac{1}{2}}) + \mathrm{Im}(BQ^{\frac{1}{2}}) + \ldots + \mathrm{Im}(B^k Q^{\frac{1}{2}}) \subset \mathbb{R}^n.$$

Quand la condition de Kalman est satisfaite par les matrices B et $Q^{\frac{1}{2}}$, on observe que

$$\{0\} \subsetneq V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_r = \mathbb{R}^n.$$

Pour tout $0 \leq k \leq r$, on considère $\mathbb{P}_k$ la projection orthogonale sur V_k.

Exemple :

Considérons les deux matrices

$$B = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = 2\begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Les noyaux des matrices $Q^{\frac{1}{2}}$ et $Q^{\frac{1}{2}}B^T$ sont respectivement donnés par

$$\operatorname{Ker}(Q^{\frac{1}{2}}) = \mathbb{R}_x^n \times \{0_{\mathbb{R}_v^n}\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}(Q^{\frac{1}{2}}B^T) = \{0_{\mathbb{R}_x^n}\} \times \mathbb{R}_v^n,$$

et par conséquent,

$$\operatorname{Ker}(Q^{\frac{1}{2}}) \cap \operatorname{Ker}(Q^{\frac{1}{2}}B^T) = \{0\}.$$

Ainsi, B et $Q^{\frac{1}{2}}$ satisfont la condition de Kalman avec $r = 1$.

Multiplicateur de Fourier :

Soient A une matrice réelle de taille $n \times n$ et $q \geq 0$. On définit l'opérateur

$$\langle AD_x \rangle^q : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),$$

par

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(\langle AD_x \rangle^q u) = \langle A\xi \rangle^q \mathscr{F}(u).$$

Espace de Sobolev anisotropique :

Pour tout matrice réelle A de taille $n \times n$ et $q \geq 0$, on définit l'espace de Sobolev anisotropique $H^q_A(\mathbb{R}^n)$ par

$$H^q_A(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \langle AD_x \rangle^q u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Si $q = m$ est entier, on a la caractérisation suivante :

$$H^m_A(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \forall |\alpha| \leq m, (A\partial_x)^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Théorème :

Lorsque les matrices B et $Q^{\frac{1}{2}}$ satisfont la condition de Kalman, il existe des constantes $C > 1$ et $0 < t_0 < 1$ telles que pour tout $k \in \{0, \dots, r\}$, $q > 0$, $0 < t < t_0$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\langle \mathbb{P}_k D_x \rangle^q e^{t\mathcal{L}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C^{1+q}}{t^{q(\frac{1}{2}+k)}} \ e^{\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(B)t} \ q^{\frac{q}{2}} \ \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

où $\mathbb{P}_k$ désigne la projection orthogonale sur l'espace vectoriel V_k et $0 \leq r \leq n-1$ est le plus petit entier tel que $V_r = \mathbb{R}^n$.

Remarque :

En particulier, comme $\mathbb{P}_r$ est la matrice identité, on en déduit que pour tout $q > 0$, $0 < t < t_0$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\langle D_x \rangle^q e^{t\mathcal{L}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C^{1+q}}{t^{q(\frac{1}{2}+r)}} \ e^{\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(B)t} \ q^{\frac{q}{2}} \ \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Remarque :

Ce résultat implique également que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $0 < t < t_0$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\partial_x^\alpha (e^{t\mathcal{L}} u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C^{1+|\alpha|}}{t^{|\alpha|(\frac{1}{2}+r)}} \; e^{\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(B)t} \; (\alpha!)^{\frac{1}{2}} \; \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ainsi, pour tout $t > 0$, l'opérateur $e^{t\mathcal{L}}$ régularise dans l'espace Gevrey $G^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$.

Exemple :

Il existe des constantes $C > 1$ and $0 < t_0 < 1$ telles que pour tout $q > 0$, $0 < t < t_0$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$,

$$\|\langle D_v\rangle^q e^{t\mathcal{L}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \leq \frac{C^{1+q}}{t^{\frac{q}{2}}} \, q^{\frac{q}{2}} \, \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})},$$

et

$$\|\langle D_x\rangle^q e^{t\mathcal{L}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \leq \frac{C^{1+q}}{t^{\frac{3q}{2}}} \, q^{\frac{q}{2}} \, \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})},$$

avec $\mathcal{L}$ l'opérateur de Kolmogorov défini par

$$\mathcal{L} = \Delta_v - v \cdot \nabla_x, \quad (x, v) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Plan

Opérateurs d'Ornstein-Uhlenbeck

Semi-groupes d'Ornstein-Uhlenbeck

Effets régularisants des semi-groupes

Estimations sous-elliptiques globales L^2

Théorème :

Lorsque les matrices B et $Q^{\frac{1}{2}}$ satisfont la condition de Kalman, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in D(\mathcal{L})$,

$$\sum_{k=0}^{r} \|\langle \mathbb{P}_k D_x \rangle^{\frac{2}{1+2k}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\big[\|\mathcal{L}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\big],$$

où $\mathbb{P}_k$ désigne la projection orthogonale sur l'espace vectoriel V_k et $0 \leq r \leq n-1$ est le plus petit entier tel que $V_r = \mathbb{R}^n$.

Remarque :

Comme $\mathbb{P}_r$ est la matrice identité, ce théorème montre que

$$\forall u \in D(\mathcal{L}), \quad \|\langle D_x \rangle^{\frac{2}{1+2r}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\big[\|\mathcal{L}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\big].$$

Corollaire :

Lorsque B et $Q^{\frac{1}{2}}$ satisfont la condition de Kalman, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in D(\mathcal{L})$,

$$\|\langle Bx, \nabla_x\rangle u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\big[\|\mathcal{L}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\big].$$

Exemple :

Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in D(\mathcal{L})$,

$$\|v \cdot \nabla_x u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\langle D_x\rangle^{\frac{2}{3}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\langle D_v\rangle^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\big[\|\mathcal{L}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\big],$$

avec $\mathcal{L}$ l'opérateur de Kolmogorov défini par

$$\mathcal{L} = \Delta_v - v \cdot \nabla_x, \quad (x, v) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Merci de votre attention !