Rencontres Doctorales Lebesgue 2018 - Centre Henry Lebesgue

Quelques problèmes elliptiques non linéaires avec exposant critique de Sobolev

Mbaye Diouf

Doctorant
Laboratoire de stabilité et contrôle des systèmes & Edp non linéaires
Ecole Doctorale de Sciences Fondamentales - Faculté des Sciences de Sfax

15 au 17 Octobre 2018

Il s'agit d'équations aux dérivées partielles issues de la géométrie différentielle (problèmes de courbures, applications harmoniques, etc.) et de la physique (problème de Yang Mills, problème des 3 corps).
On s'intéresse au problème

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = u^p + f(x,u) \ sur \ \Omega \\ u > 0 \ sur \ \Omega \\ u = 0 \ sur \ \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un ouvert borné régulier dans $\mathbb{R}^N, \ N \geq 3, \ p = \frac{N+2}{N-2}$ et $f(x,0) = 0$.
Le terme perturbation $f(x,u)$ vérifie $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{f(x,u)}{u^p} = 0$.
Les solutions de (P) correspondent à des points critiques de la fonctionnelle

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1} - \int F(x,u) \ \ où \ F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt \tag{2}$$

$p+1$ est l'exposant limite pour l'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ non compacte. ϕ ne vérifie pas P.S [1] et donc quelques difficultés à en trouver des points critiques.
Par exemple lorsque $f(x,u) = \lambda u$ et λ_1 la première valeur propre de $-\Delta$ avec condition de Dirchlet, on a les propositions suivantes :

Proposition 1

On suppose que $N \geq 4$. Le problème (P) admet une solution pour $\lambda \in]0, \lambda_1[$.
Si Ω est étoilé alors le problème (P) n'admet aucune solution lorsque $\lambda \notin]0, \lambda_1[$.

Proposition 2

Si $N = 3$ et Ω est une boule de $\mathbb{R}^N$ alors le problème (P) admet une solution si et seulement si $\lambda \in]\frac{\lambda_1}{4}, \lambda_1[$.

1. Une fonction ϕ vérifie Palais Smale (P.S) si pour toute suite (u_n) d'un espace de Banach E telle que $\phi(u_n)$ borné et $\|\phi(u_n)\| \to 0$ alors (u_n) relativement compact

Cas où $f(x,u)=0$

Dans le cas où $f(x,u)=0$, nous traitons pour ce qui suit du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p \ sur \ \Omega \\ u > 0 \ sur \ \Omega \\ u = 0 \ sur \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

où Ω est un ouvert borné régulier dans $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ et $p = \frac{N+2}{N-2}$

Dans ce cas les solutions de (3) correspondent aux points critiques de ϕ de classe C^1 dans l'espace de Banach $H_0^1(\Omega)$:

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\, dx \tag{4}$$

D'après [17], on considère S la constante de Sobolev pour $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$:

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\left(\int_\Omega |u|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}} \tag{5}$$

• S dépend de N et est indépendant de Ω.
• S n'est jamais atteint lorsque $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ et est atteint sur $\mathbb{R}^N$ par la famille de fonctions définies par

$$U_{a,\epsilon}(x) = c_N \left[\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |x-a|^2}\right]^{\frac{N-2}{2}} \tag{6}$$

où $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^N$ et $c_N = [N(N-1)]^{\frac{N-2}{4}}$ tel que les fonctions $U_{a,\epsilon}$ soient solutions de l'équation $-\Delta u = u^p$ sur $\mathbb{R}^N$.

L'idée est d'exploiter la topologie de Ω pour établir l'existence d'une solution. Pohozaev $[3]$ montre que le problème (3) n'a pas de solution lorsque Ω est étoilé. Quand Ω est un anneau c'est-à-dire $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N / r_1 \leq x \leq r_2\}$, Kazdan et Warner $[5]$ établissent que (3) a une solution radiale.
Dans $[2]$, J. M. Coron prouve que si Ω est un domaine avec un petit trou, alors l'équation (3) admet une solution.

Théorème 1

Il existe $\lambda > 0$ tel que si Ω vérifie la condition suivante :
$\exists\ x_0 \in \mathbb{R}^N,\ \exists\ R_1 > 0,\ \exists\ R_2 > 0$ tels que $R_2 > \lambda R_1$
$\{x \in \mathbb{R}^N / R_1 \leq |x - x_0| \leq R_2\} \subset \Omega$ et $\{x \in \mathbb{R}^N / \, |x - x_0| < R_1\} \not\subset \overline{\Omega}$.
Alors le problème (3) admet une solution.

<u>Preuve</u>
On pose $x_0 = 0,\ \Sigma = \{u \in H_0^1(\Omega) / \int_\Omega |\nabla u|^2 = 1\},\ \Sigma^+ = \{u \in \Sigma / u \geq 0\}$

$$J(v) = \frac{1}{\left(\int_\Omega |v|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{2}}} \ pour\ tout\ v \in \Sigma \tag{7}$$

$J \in C^1(\Sigma)$ et $J'(v) = NJ(v)\left(v - J(v)^{\frac{2}{N-2}}(-\Delta)^{-1}\left(|v|^{\frac{4}{N-2}}v\right)\right)$.
Si $u = J(v)^{\frac{1}{2}}v$ alors $J'(v) = 0$ si et seulement si $-\Delta u = |u|^{\frac{4}{N-2}}u$,

c'est-à-dire si $u = J(v)^{\frac{1}{2}} v$ et $v_{/\Omega} > 0$ alors $J'(v) = 0 \Leftrightarrow u$ est soluton de (3).

On note $\overline{S} = \inf_{\Sigma} J = S^{\frac{N}{2}}$, $J^{\lambda} = \{u \in \Sigma / J(u) \leq \lambda\}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $J_{+}^{\lambda} = J^{\lambda} \cap \Sigma^{+}$.

Proposition 3

Soit (u_n) une suite d'éléments de Σ telle que $J(u_n) = \overline{S} + o(1)$ alors à partir d'une sous suite (u_{n_l}), il existe $x \in \overline{\Omega}$ tel que $|\nabla u_n|_l^2 \to \delta_x$ $(convergence\ en\ mesure)$. où δ_x est le mésure de Dirac en x.

Soient $F :\ u \in \Sigma \mapsto F(u) = \int_{\Omega} x\,|\nabla u|^2$ et $\Pi^{N-1} = \{\sigma \in \mathbb{R}^N / \,|\sigma| = 1\}$.

Lemme 1

Si V est un voisinage de $\overline{\Omega}$ alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $F(J^{\overline{S}+\epsilon}) \subset V$.

On pose $u_t^{\sigma}(x) = \left[\frac{1-t}{(1-t)^2 + |x - t\sigma|^2}\right]^{\frac{N-2}{2}}$ où $t \in [0,1[$, $x \in \mathbb{R}^N$ et $\sigma \in \Pi^{N-1}$.

$\int_{\mathbb{R}^N} |u_t^{\sigma}|^{\frac{2N}{N-2}}$ et $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_t^{\sigma}|^2$ sont indépendants de t et σ.

u_t^σ se concentre autour de σ quand $t \to 1$ et $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_t^\sigma|^2 = S\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_t^\sigma|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N}}$.

Soient les fonctions $\varphi \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N, [0,1]\right)$ et $\varphi_k \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N, [0,1]\right)$ pour $k \geq 1$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \ si \, |x| \leq \frac{1}{4} \ et \ \ |x| \geq 2 \\ 1 \ si \ \frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2} \end{cases} \quad ; \quad \varphi_k(x) = \begin{cases} \varphi(kx) \ si \ \ |x| \leq \frac{1}{k} \\ \varphi(\frac{x}{k}) \ si \ \ |x| \geq k \\ 1 \ ailleurs \end{cases}$$

et la projection $P \ : \ Pw = \frac{w}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2\right)^{\frac{1}{2}}}$, $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tel que $|\nabla w| \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

On pose $v_{k,t}^\sigma = P(\varphi_k u_t^\sigma)$.

<u>Lemme 2</u>

• $\forall \ \epsilon > 0, \ \exists \ \eta > 0$ tel que

$\eta \leq t \leq 1 \Rightarrow \forall \ \sigma \in \Pi^{N-1}, \ k \geq 1, \ J(v_{k,t}^\sigma) \leq \overline{S} + \epsilon$ et $\left| F(v_{k,t}^\sigma) - \sigma \right| \leq \epsilon$

• $\forall \ \delta > 0, \ \exists \ k_0 \geq 1$ tel que

$k \geq k_0 \Rightarrow \forall \ \sigma \in \Pi^{N-1}$ et $\forall \ t \in [0,1[, \ J(v_{k,t}^\sigma) \leq \overline{S} + \delta$

Lemme 3
J satisfait $(PS)_c$ [2] sur Σ^+ pour tout $c \in]\overline{S}, 2\overline{S}[$.
(ind : considérer $u_p = J(v_p)^{\frac{1}{2}} v_p$ et se référer à [7] et [8]).

Soit $\delta = \frac{\overline{S}}{2}$ ou $(\delta \in]0, \overline{S}[)$. D'après le lemme 2, il existe $k_0 \geq 0$ tel que $v^\sigma_{k_0,t} \in J^{\overline{S}+\delta}$.

On note $v^\sigma_t = v^\sigma_{k_0,t/\Omega}$ et pour $\alpha \geq 4k_0$, $R_1 = \alpha^{-1}$, $R_2 = \alpha$.
Montrons alors que (3) admet une solution :
Soient $\forall\ t \in [0,1[$, $\forall\ \sigma \in \Pi^{N-1}$, $v^\sigma_t \in \Sigma^+$ et V un voisinage compact de Ω tel que $\{x/\, |x| < \alpha^{-1}\} \not\subset V$.
Lemme 1 : $\exists\ \epsilon_0 > 0$ tel que $F(J^{\overline{S}+\epsilon_0}) \subset V$.
Lemme 2 : $\exists\ t_0 \in]0,1[$ tel que $\forall\ \sigma \in \Pi^{N-1}$, si $f(\sigma) = v^\sigma_{t_0}$ et $\theta(\sigma) = F(f(\sigma))$ alors $f(\sigma) \in J^{\overline{S}+\epsilon_0}$ et $|\theta(\sigma) - \sigma| \leq \epsilon_0$, .

2. J vérifie $(PS)_c$ sur Σ^+ si pour toute suite (v_n) de Σ^+ telle que $J(v_n) \to c$ et $J'(v_n) \to 0$ alors (v_n) admet une sous-suite convergente

On note que $f \in C^0(\Pi^{N-1}, J^{\overline{S}+\epsilon_0})$ et d'après ce qui précède, f n'est pas homotope à une application constante dans $C^0(\Pi^{N-1}, J^{\overline{S}+\epsilon_0})$.

Soit $\gamma \ : \ [0, t_0] \to C^0(\Pi^{N-1}, \Sigma^+)$ telle que $[\gamma(t)](\sigma) = v_t^\sigma \in J^{\overline{S}+\delta} = J^{\frac{3\overline{S}}{2}}$.
γ est continue, $\gamma(t_0) = f$ et v_0^σ ést indépendant de σ.
Donc $\gamma(0)$ est une application constante.
On obtient $\gamma \in C^0\left([0, t_0], C^0\left(\Pi^{N-1}, J^{\frac{3\overline{S}}{2}} \bigcap \Sigma^+\right)\right)$ et f est homotope à $\gamma(0)$.

Par le lemme 3, on déduit qu'il existe $v \in \Sigma^+$ tel que $J'(v) = 0$ et $\overline{S} \leq J(v) \leq \frac{3\overline{S}}{2}$ $\square$

Dans [10], O. Rey a montré que si Ω est un ouvert borné régulier privé de k boules centrées en x_i $(1 \leq i \leq k)$ de rayon d, alors pour tout $i = 1, ..., k$, il existe pour tout d assez petit, une solution u de (3) qui se concentre autour de x_i, c'est-à-dire $|\nabla u|^2 \to S^{\frac{N}{2}} \delta_{x_i}$ au sens des mesures sur Ω.

Hypothèses

Soient Ω un ouvert borné régulier de R^N, $N \geq 3$, k points distincts $x_1, ...x_k$ de Ω et d un réel strictement positif. On note $\Omega_d = \Omega \bigcup_{1 \leq i \leq k} B(x_i, d)$ où $B(x_i, d) \subset \Omega$ désigne la boule fermée de centre x_i et de rayon d.
On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}} \ sur \ \Omega_d \\ u > 0 \ sur \ \Omega_d \\ u = 0 \ sur \ \partial\Omega_d \end{cases} \tag{8}$$

Théorème 2

Pour tout $i = 1, ..., k$, il existe $d_0 > 0$ tel que pour tout $d < d_0$ le problème (8) admette une solution u qui se concentre autour de x_i, c'est-à-dire quand $d \to 0$, $|\nabla u|^2 \to S^{\frac{N}{2}} \delta_{x_i}$ au sens des mesures sur Ω.
Pour d assez petit, (8) admet au moins k solutions

Soient $\{i_1, ..., i_j\} \subset \{1, ..., k\}$ et $j = 1, ..., k$.
Notons par $M(x_{i_1}, ..., x_{i_j})$ la matrice $(a_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq j}$ définie par

$$\begin{cases} a_{\alpha\alpha} = H(x_{i_\alpha}, x_{i_\alpha}) \\ a_{\alpha\beta} = -G(x_{i_\alpha}, x_{i_\beta}) \; si \; \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{9}$$

G étant la fonction de Green du Laplacien sur Ω et H sa partie régulière.
$G(x, y) = |x - y|^{2-N} - H(x, y)$ sur $\Omega \times \Omega$ où H est harmonique par rapport à chacune des variables et G nulle sur le bord de $\Omega \times \Omega$.

Théorème 3 (cas général)

(i) On suppose que la matrice symétrique $M(x_{i_1}, ..., x_{i_j})$ est définie positive. Alors il existe $d_0 > 0$ tel que pour tout $d < d_0$ le problème (8) admet une solution u qui se concentre autour des $x_{i_1}, ..., x_{i_j}$ c'est-à-dire lorsque $d \to 0$, $|\nabla u|^2 \to S^{\frac{N}{2}} \sum_{m=1}^{j} \delta_{x_{i_m}}$ au sens des mesures sur Ω.
(ii) Si $M(x_1, ..., x_k)$ est définie positive, (8) admet pour d assez petit, au moins $2^k - 1$ solutions.

On remarque que si $M(x_1, ..., x_k)$ est définie positive, alors $M(x_{i_1}, ..., x_{i_j})$ est définie positive pour tout $\{i_1, ..., i_j\} \subset \{1, ..., k\}$. Le nombre des parties non vides de $\{1, ..., k\}$ est $2^k - 1$. Donc (8) admet au moins $2^k - 1$ solutions.

Preuve du théorème

Définissons sur $H_0^1(\Omega_d)$ la fonctionnelle

$$K(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_d} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\Omega_d} |u|^{\frac{2N}{N-2}} \tag{10}$$

Les points critiques u de K sont solutions de (8).
On considère $\lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \beta \in \mathbb{R}^N$.

Soient $U_{\lambda,\beta}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ par $U_{\lambda,\beta}(y) = \lambda^{\frac{N-2}{2}}\left(1 + \lambda^2 |y-\beta|^2\right)^{\frac{2-N}{2}}$ et $PU_{\lambda,\beta}$ sa projection sur $H_0^1(\Omega_d)$ vérifiant $\Delta PU_{\lambda,\beta} = \Delta U_{\lambda,\beta}$ sur Ω_d.
On a $(N(N-2))^{\frac{N-2}{4}} U_{\lambda,\beta}$ est solution de (8) sur $\mathbb{R}^N$ et

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |U_{\lambda,\beta}|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{2-N}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla U_{\lambda,\beta}|^2\right) = S \tag{11}$$

Supposons que $(x_{i_1}, ..., x_{i_j}) = (x_1, ..., x_j)$.

On cherche un point critique de K de la forme $u = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i PU_i + v$

où $PU_i = PU_{\lambda_i,\beta_i}$ λ_i grand, β_i proche de x_i, α_i proche de $(N(N-2))^{\frac{N-2}{4}}$
et v assez petit appartenant à l'espace E_{λ_i,β_i} défini par :
$E_{\lambda_i,\beta_i} = \{w \in H_0^1(\Omega_d) / < w, PU_i >_{H_0^1} = < w, \frac{\partial PU_i}{\partial \beta_i} >_{H_0^1} = < w, \frac{\partial PU_i}{\partial \beta_{i_m}} >_{H_0^1} = 0\}$
où $1 \leq m \leq j$.

Soit $J(\alpha, \lambda, \beta, v) = J(\alpha_1, ..., \alpha_j, \lambda_1, ..., \lambda_j, \beta_1, ..., \beta_j, v) = K\left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_i PU_i + v\right)$.

Proposition 4

$u = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i PU_i + v$ est un point critique de K si et seulement s'il existe des réels $A_i,\ B_i,\ C_{il},\ i,l = 1, ..., j$ tels que $(\alpha, \lambda, \beta, v)$ satisfait les équations (E) :

$$\begin{cases} (E1)\ \frac{\partial J}{\partial \alpha_i}(\alpha, \lambda, \beta, v) = 0 \\ (E2)\ \frac{\partial J}{\partial \lambda_i}(\alpha, \lambda, \beta, v) = B_i \left\langle v, \frac{\partial^2 PU_i}{\partial \lambda_i^2} \right\rangle_{H_0^1} + \sum_{l=1}^{j} C_{il} \left\langle v, \dfrac{\partial^2 PU_i}{\partial \beta_l \partial \lambda_i} \right\rangle_{H_0^1} \\ (E3)\ \frac{\partial J}{\partial \beta_i}(\alpha, \lambda, \beta, v) = B_i \left\langle v, \frac{\partial^2 PU_i}{\partial \lambda_i \partial \beta_i} \right\rangle_{H_0^1} + \sum_{l=1}^{j} C_{il} \left\langle v, \dfrac{\partial^2 PU_i}{\partial \beta_l \partial \beta_i} \right\rangle_{H_0^1} \\ (E4)\ \frac{\partial J}{\partial v}(\alpha, \lambda, \beta, v) = \sum_{i=1}^{j} \left(A_i PU_i + B_i \dfrac{\partial PU_i}{\partial \lambda_i} + \sum_{l=1}^{j} C_{il} \dfrac{\partial PU_i}{\partial \beta_l} \right) \end{cases} \tag{12}$$

En effet on considère

$$\alpha_i = (N(N-2))^{\frac{N-2}{4}}(1+\eta_i), \quad \eta = (\eta_i)_{1\le i\le j} \tag{13}$$

$$\lambda_i = \rho_i^{\frac{2}{2-N}} d^{-\frac{1}{2}}, \quad \rho = (\rho_i)_{1\le i\le j} \tag{14}$$

$$z_i = \beta_i - x_i, \quad z = (z_i)_{1\le i\le j} \tag{15}$$

où $\rho_i \in C$ compact de $\mathbb{R}_+^*$, $|\eta_i| < \eta_0 \ \forall\ i = 1,..,j$;
$|z_i|\, d^{-a} < \nu_a \ \forall\ a \in]0,1[, \ \forall\ i = 1,..,j$ et $\eta_0, \ \nu_a$ des constantes.

Lemme 4

Soit un compact C de $\mathbb{R}_+^*$. Il existe $d_0, \ \eta_0, \ \nu_a$ tels que si η, ρ, z vérifient respectivement (13), (14), (15) et $d < d_0$ alors on peut trouver $\overline{v} \in E_{\lambda_i,\beta_i}$ et $A_i, \ B_i, \ C_{il} \in \mathbb{R}$ tels que $(\alpha, \lambda, \beta, \overline{v})$ satisfait l'équation $(E4)$.

On en déduit pour $i, l = 1, ..., j$ les équations (E') :

$$\begin{cases} (E'1) \quad \eta_i = V_i(d, \eta, \rho, z) \\ (E'2) \quad H(x_i, x_i)\rho_i - \sum_{m=1, m\neq i}^{j} G(x_i, x_m)\rho_m - \frac{1}{\rho_i^3} = W_i(d, \eta, \rho, z) \\ (E'3) \quad z_{il} = Z_{il}(d, \eta, \rho, z) \end{cases} \tag{16}$$

où V_i, W_i et Z_{il} sont des fonctions continues qui vérifient respectivement :

$$V_i = O[d^{\frac{N-2}{2}} + |\eta|^2] \tag{17}$$

$$W_i = O[\frac{|z|^2}{d} + |\eta| + |d|^{\frac{1}{2}} . (1 \ si \ N \neq 4, |Log \ d| \ \ si \ N = 4)] \tag{18}$$

$$Z_{il} = O[d] \tag{19}$$

Supposons que $M(x_1,...,x_j)$ est définie positive.

La fonction définie par $\rho \mapsto \rho^T.M.\rho + \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{\rho_i^2}$ admet sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^j$ un minimum atteint en un point $(\overline{\rho}_1,...,\overline{\rho}_j)$.

Posons $\rho_i = \overline{\rho}_i + \rho_i'$ pour tout $i = 1,...,j$. $(E'2) \;\Rightarrow\; (E''2) \;:\; \rho_i' = W_i'(d,\eta,\rho',z)$ où W_i' est une fonction continue de même estimation que W_i.

Donc d'après le théorème du point fixe de Brouwer [3], pour d assez petit, le système (E') admet une solution vérifiant $\begin{cases} |\eta_i| \leq rd^{\frac{N-2}{2}} \\ |z_i| \leq rd \\ \rho_i' \leq rd^{\frac{1}{2}}.(1\ si\ N \neq 4,\ |Log\ d|\ \ si\ N=4) \end{cases}$
où r une constante strictement positive.

$u = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i PU_i + \overline{v}$ est alors solution sur Ω_d de l'équation $-\Delta u = |u|^{\frac{4}{N-2}}\,u$.

3. Toute application continue d'un convexe compact K d'un espace euclidien à valeurs dans K admet un point fixe

Montrons que u est positive :

En multipliant l'équation précédente par $u^- = max(0, -u)$ et intégrant sur Ω_d, on obtient $\int_{\Omega_d} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_d} (u^-)^{\frac{2N}{N-2}}$.
Or $\int_{\Omega_d} |\nabla u|^2 \geq S \left(\int_{\Omega_d} (u^-)^{\frac{2N}{N-2}} \right)^{\frac{N-2}{N}}$ et $|u^-|_{\frac{2N}{N-2}} \leq |\overline{v}|_{\frac{2N}{N-2}} \leq S^{\frac{1}{2}} |\overline{v}|_{H_0^1}$ $(d \to 0)$, donc pour d assez petit, on a $u^- \equiv 0$.
D'après le principe du maximum fort [4] on obtient alors $u > 0$ sur Ω_d.

On conclut que u est bien solution de (8) et $|\nabla u|^2 \to S^{\frac{N}{2}} \sum_{i=1}^{j} \delta_{x_i}$

4. Principe du maximum fort : si une solution d'une équation aux dérivées partielles parabolique ou elliptique définie sur $D \subset \mathbb{R}^N$ atteint son maximum à l'intérieur de D alors elle est constante

Approximation du problème (3)

Nous abordons le système sous-critique de Bahri-Coron (P_ϵ) dans un domaine Ω borné régulier de $\mathbb{R}^N$:

$$(P_\epsilon) \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1-\epsilon} u \ sur \ \Omega \\ u = 0 \ sur \ \partial\Omega \end{cases} \tag{20}$$

où ϵ un paramètre réel positif et $p+1 = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant limite de Sobolev pour l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$.
Lorsque $u > 0$ sur Ω alors (P_ϵ) correspond à une approximation du problème (P).

Soit la fonctionnelle J_ϵ définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$J_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{p+1-\epsilon}\int_\Omega |u|^{p+1-\epsilon} \, dx \tag{21}$$

Les points critiques de J_ϵ sont solutions de (P_ϵ). Lorsque $\epsilon \to 0$, ces solutions u_ϵ peuvent soit converger vers une solution de (P), soit exploser à un nombre fini de points de Ω. On peut établir que

$$u_\epsilon = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i^\epsilon P\delta_{\lambda_i^\epsilon, x_i^\epsilon} + v^\epsilon \tag{22}$$

où $P\delta_{\lambda,x}$ est la projection sur $H_0^1(\Omega)$ de $\delta_{\lambda,x}$: $y \in \mathbb{R}^N \mapsto \lambda^{\frac{N-2}{2}} \left[1 + \lambda^2 |y-x|^2\right]^{\frac{2-N}{2}}$ c'est-à-dire l'unique élément de $H_0^1(\Omega)$ tel que $\Delta P\delta_{\lambda,x} = \Delta\delta_{\lambda,x}$ sur Ω.

Lorsque $\epsilon \to 0$ alors $\alpha_i^\epsilon \to C_N = (N(N-1))^{\frac{N-2}{4}}$, $x_i^\epsilon \to x_i$, $v^\epsilon \overset{H_0^1(\Omega)}{\to} 0$
$\lambda_i^\epsilon \to +\infty$, $\lambda_i^\epsilon d(x_i^\epsilon, \partial\Omega) \to 0$ et $\frac{\lambda_i^\epsilon}{\lambda_j^\epsilon} + \frac{\lambda_j^\epsilon}{\lambda_i^\epsilon} + \lambda_i^\epsilon \lambda_j^\epsilon \left|x_i^\epsilon - x_j^\epsilon\right|^2 \to 0$, $\forall\, i \neq j$.
On note $P\delta_i = P\delta_{\lambda_i, x_i}$ et on suppose que $v^\epsilon \in E_{\lambda_i^\epsilon, x_i^\epsilon}$.

Thérème 4

Soient $N \geq 4$ et (u_ϵ) une famille de solutions de (P_ϵ) telle que :
$|\nabla u_\epsilon| \to S^{\frac{N}{2}}\,(\delta_{x_1} + \delta_{x_2})$ quand $\epsilon \to 0$ et $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$. Alors
(i) $(x_1, x_2) \in \Omega \times \Omega$
(ii) $\varphi(x_1, x_2) = H(x_1, x_1)^{\frac{1}{2}} H(x_2, x_2)^{\frac{1}{2}} - G(x_1, x_2) \geq 0$ (et donc $x_1 \neq x_2$)
(iii) $\varphi'(x_1, x_2) = 0$
De plus si (x_1, x_2) est point critique non dégénéré de φ tel que $\varphi(x_1, x_2) > 0$, alors il existe une famille de solutions de (P_ϵ) se concentrant en x_1 et x_2 quand $\epsilon \to 0$.

Preuve
Soit $K_\epsilon(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, v) = J_\epsilon(\alpha_1 P\delta_1 + \alpha_2 P\delta_2 + v)$ sur la variété

$$\begin{cases} |\alpha_i - c_N| < \eta_0, \quad \lambda_1 > \frac{1}{\eta_0}, \quad \lambda_2 > \frac{1}{\eta_0} \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda_1\lambda_2 \left|x_1 - x_2\right|^2 > \frac{1}{\eta_0} \\ v \in E_{\lambda_i, x_i}, \quad |v| < \nu_0; \quad \eta_0,\ d_0,\ v_0 > 0 \textit{ et assez petites} \end{cases} \tag{23}$$

Proposition

Pour que $u = \alpha_1 P\delta_1 + \alpha_2 P\delta_2 + v$ soit point critique de J_ϵ, il faut et il suffit que $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, v)$ soit point critique de K_ϵ c'est-à-dire si et seulement s'il existe des réels $A_i,\ B_i$ et $C_i,\ i = 1, 2$ tels que :

$$(E)\begin{cases} (E_{\alpha_i}) \ : \ \frac{\partial K_\epsilon}{\partial \alpha_i} = 0 \\ (E_{\lambda_i}) \ : \ \frac{\partial K_\epsilon}{\partial \lambda_i} = B_i \int_\Omega \nabla \frac{\partial^2 P\delta_i}{\partial \lambda_i^2} \nabla v + C_i \int_\Omega \nabla \frac{\partial^2 P\delta_i}{\partial \lambda_i \partial x_i} \nabla v \\ (E_{x_i}) \ : \ \frac{\partial K_\epsilon}{\partial x_i} = B_i \int_\Omega \nabla \frac{\partial^2 P\delta_i}{\partial x_i \partial \lambda_i} \nabla v + C_i \int_\Omega \nabla \frac{\partial^2 P\delta_i}{\partial x_i^2} \nabla v \\ (E_v) \ : \ \frac{\partial K_\epsilon}{\partial v} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \left(A_i P\delta_i + B_i \frac{\partial P\delta_i}{\partial \lambda_i} + C_i \frac{\partial P\delta_i}{\partial x_i} \right) \end{cases}$$

En multipliant l'équation (E_v) par v dans $H_0^1(\Omega)$, on a une estimation de $\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$, puis en la multipliant respectivement par $P\delta_i,\ \frac{\partial P\delta_i}{\partial \lambda_i},\ \frac{\partial P\delta_i}{\partial x_i}$, on obtient des estimations de $A_i,\ B_i$ et C_i.

On note $\alpha_i = c_N - \rho_i$ et $\mu = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda_1 \lambda_2 |x_1 - x_2|^2 \right)^{\frac{2-N}{2}}$

Ensuite d'après [13], les équations (E_{λ_i}) de (E) deviennent pour $i = 1, 2$:

$$\frac{H(x_i^\epsilon,x_i^\epsilon)}{\left(\lambda_i^\epsilon\right)^{N-1}}\left(1+o(1)\right)+\frac{2}{N-2}\frac{\partial\mu^\epsilon}{\partial\lambda_i}\left(1+o(1)\right)+\frac{H(x_i^\epsilon,x_j^\epsilon)}{\left(\lambda_i^\epsilon\right)^{\frac{N}{2}}\left(\lambda_j^\epsilon\right)^{\frac{N-2}{2}}}\left(1+o(1)\right)=\omega\frac{\epsilon}{\lambda_i^\epsilon}$$

où ω est une constante strictement positive.

Donc $\mu^\epsilon \sim \left(\lambda_1^\epsilon\lambda_2^\epsilon\left|x_1^\epsilon-x_2^\epsilon\right|^2\right)^{\frac{2-N}{2}}$ quand $\epsilon\to 0$ et si $\left(\lambda_i^\epsilon\right)^{\frac{2-N}{2}}=\omega^{\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}\vartheta_i^\epsilon$ alors $H(x_i^\epsilon,x_i^\epsilon)(\vartheta_i^\epsilon)^2\left(1+o(1)\right)-G(x_i^\epsilon,x_j^\epsilon)\vartheta_i^\epsilon\vartheta_j^\epsilon\left(1+o(1)\right)=1.$

$(\vartheta_i^\epsilon)^2$ est égal à :

$$H(x_i^\epsilon,x_i^\epsilon)^{-\frac{1}{2}}H(x_j^\epsilon,x_j^\epsilon)^{\frac{1}{2}}\left[H(x_i^\epsilon,x_i^\epsilon)^{\frac{1}{2}}H(x_j^\epsilon,x_j^\epsilon)^{\frac{1}{2}}(1+o(1))-G(x_i^\epsilon,x_j^\epsilon)(1+o(1))\right]^{-1}$$

$\Rightarrow \varphi(x_1,x_2)=H(x_1,x_1)^{\frac{1}{2}}H(x_2,x_2)^{\frac{1}{2}}-G(x_1,x_2)\geq 0$ et donc $x_1\neq x_2$.
Des équations (E_{x_i}), on en déduit l'égalité $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1^\epsilon,x_2^\epsilon)=0$.
Et en passant à la limite, on obtient $\varphi'(x_1,x_2)=0$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe $\eta_0,\ d_0,\ \nu_0>0$, tels que pour ϵ assez petit et $\alpha_i,\ \lambda_i,\ x_i,\ (i=1,2)$ vérifiant (23), on trouve un unique $\overline{v}\in E_{\lambda_i,x_i},\ \left|\overline{v}\right|_{H_0^1}<\nu_0$ tel que (E_v) est vérifiée pour des réels $A_i,\ B_i,\ C_i$.

Soient $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in \Omega \times \Omega$ un point critique non dégénéré de φ tel que $\varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2) > 0$ et $\left(\overline{\vartheta}_1, \overline{\vartheta}_2\right)$ la solution dans $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ du système

$$H(\overline{x}_i, \overline{x}_i)(\overline{\vartheta}_i)^2 - G(\overline{x}_i, \overline{x}_j)\overline{\vartheta}_i\overline{\vartheta}_j = 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2 \tag{24}$$

correspondant au minimum sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ de la fonction
$(\vartheta_1, \vartheta_2) \mapsto \frac{1}{2}\left(H(\overline{x}_1, \overline{x}_1)\vartheta_1^2 + H(\overline{x}_2, \overline{x}_2)\vartheta_2^2 - 2G(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\vartheta_1\vartheta_2\right) - Log\vartheta_1\vartheta_2$

Posons $\lambda_i^{\frac{2-N}{2}} = \omega^{\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}\left(\overline{\vartheta}_i + \zeta_i\right), \quad x_i = \overline{x}_i + \xi_i. \quad (E)$ devient pour $v = \overline{v}$:

$$(E') \quad \begin{cases} \rho_i = V_i(\rho, \zeta, \xi, \epsilon) \\ M(\zeta_1, \zeta_2, \xi_1, \xi_2) = W(\rho, \zeta, \xi, \epsilon) \end{cases}$$

où $V_i,\ W$ sont des fonctions C^1 telles que $V_i(\rho, \zeta, \xi, \epsilon) = O(\epsilon\,|Log\epsilon| + \rho_i^2)$
$W_i(\rho, \zeta, \xi, \epsilon) = O\left[|\rho| + |\zeta|^2 + |\xi|^2 + \left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\ si\ N = 4,\ \epsilon^{\frac{2}{N+2}}\,|Log\epsilon|\ si\ N > 4\right)\right]$
et M matrice 4×4, inversible de déterminant $4\frac{H(\overline{x}_1,\overline{x}_1)^{\frac{1}{2}}H(\overline{x}_2,\overline{x}_2)^{\frac{1}{2}}}{\varphi(\overline{x}_1,\overline{x}_2)}\text{dét}\left[\varphi''(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\right]$.

Par le théorème du point fixe de Brouwer, il existe une solution u_ϵ du système (E') où $\rho_i^\epsilon,\ \zeta_i^\epsilon,\ \xi_i^\epsilon$ tendent vers 0 quand $\epsilon \to 0$.

D'après $[4]$, on vérifie que u_ϵ point critique de J_ϵ sur $H_0^1(\Omega)$, est strictement positive et solution de (P_ϵ) : elle se concentre en x_1 et x_2 quand $\epsilon \to 0$.

On calcule la dérivée seconde de J_ϵ en u_ϵ et on obtient l'indice $l+2$ de u_ϵ par rapport à J_ϵ où l est l'indice de $(\overline{x}_2, \overline{x}_2)$ point critique de φ.

Exemple 1

On considère un domaine D borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.
Soient $q \in D$, $B_\delta(q) \subset D$, $\delta > 0$ assez petit et $\Omega = D \backslash B_\delta(q)$.
On s'intéresse au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p \ sur \ \Omega \\ u > 0 \ sur \ \Omega \\ u = 0 \ sur \ \partial D \bigcup \partial B_\delta(q) \end{cases} \tag{25}$$

où p est surcritique, c'est-à-dire que $p > \frac{N+2}{N-2}$.

Passaseo $[14]$ établit dans le cas d'une topologie non triviale qu'i n'existe pas de solution du système (25) pour $N \geq 4$ et $p > \frac{N+1}{N-3}$.

Exemple 2

Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. On considère le problème

$$\begin{cases} \Delta u + u^p = 0 \ sur \ \mathbb{R}^N \backslash \overline{D} \\ u > 0 \ sur \ \mathbb{R}^N \backslash \overline{D} \\ u = 0 \ sur \ \partial D \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x) = 0 \end{cases} \tag{26}$$

Théorème 5

Il existe une suite d'entiers

$$\frac{N+2}{N-2} < p_1 < p_2 < p_3 < \ldots, \ avec \ \lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty \tag{27}$$

tel que si p est surcritique et $p \neq p_i$ pour tout i, alors on peut trouver $\delta_0 > 0$ assez petit pour lequel le problème (25) admet au moins une solution pour tout $\delta \leq \delta_0$.

Théorème 6

Lorsque $N \geq 4$ et $p > \frac{N+1}{N-3}$ alors le problème (26) admet une infinité de solutions qui sont suffisamment petites sur les ensembles bornés et ayant une décroissance lente $u(x) \sim |x|^{\frac{2}{1-p}}$.

[1] H. Brezis, L. Nirenberg ; *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math., $1983,\ 36\ :\ 437-477$.

[2] J. M. Coron ; *Topologie et cas limite des injections de Sobolev*, C. R. Acad. Sc., Paris, $299\ (1984)\ pp.,\ 209-211$.

[3] P. S. Pohosaev ; *On the eigenfunctions of the equation* $\Delta u+\lambda f(x)=0$, Dokhl, Akad Naur Sssr., $165,\ (1965),\ 36-39$.

[4] Olivier Rey ; *The role of Green's function in a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent*, Journal of Functional Analysis, $89,\ 1990,\ pp.\ 1-52$.

[5] J. Kazdan, F. Warner ; *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl., Math. $28,\ 1975,\ pp.\ 567-597$.

[6] Haïm Brezis ; *points critiques dans les problèmes variationnels sans compacité*, Séminaire N. Bourbaki, $1987-1988,\ exp.\ n°698,\ pp.\ 239-256$

[7] M. Struwe ; *A Global Existence Result for Elliptic Boundary Value Problems Involving Limiting Nonlinearities*, Mathematische Zeitschrift December 1984, Volume 187, Issue $4, pp.\ 511-517$.

[8] Basilis Gidas, Wei-Ming Ni, Louis Nirenberg ; *Symmetry and related properties via the maximum principle* Comm., Math. Phys., $68,\ 1979,\ pp.\ 209-243$.

[9] Olivier Rey ; *Concentration de solutions d'équations elliptiques avec nonlinéarité critique*, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, sciences de l'univers, sciences de la terre 324 (2) : $165-168,\ January\ 1997,\ 59$ Reads.

[10] O. Rey ; *On a variational problem with lack of compactness : the effect of small holes in the domain*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. $308\ (12)\ (1989)\ 349-35$.

[11] Frederik V. Atkinson, Haïm Brezis, Lambertus A. Peletier ; *Solutions d'équations elliptiques avec exposant de Sobolev critique qui changent de signe*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 306, Série I, $1988,\ pp.\ 711-714$.

[12] Z. C. Han ; *Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent* (à paraître).

[13] A. Bahri ; *Critical points at infinity in some variational problems*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 182, Longman, 1989.

[14] D. Passaseo ; *Nonexistence results for elliptic problems with supercritical nonlinearity in nontrivial domains*, J. Funct. Anal. 114 (1) (1993) $97-105$

[15] M.J. Esteban, P.L. Lions ; *Existence and nonexistence results for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Proc. Roy. Soc. Eddinburgh A 93 (1992) $1-14$.

[16] Schwartz, J. T. ; *Nonlinear Functional Analysis*, Gordon and Breach, New York, 1969.

[17] H. Brezis ; *Elliptic equations with limiting Sobolev exponents. The impact of topology*, Comm. Pure Applied Math., $39,\ 1986,\ pp.\ 17-39$.

Merci de votre attention