Problème aux limites hyperbolique et optique géométrique

Un problème aux limites est la donnée des trois équations suivantes :

$$\begin{cases} L(\partial)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d_+, \\ Bu_{|x_d=0}(t,x') = g(t,x'), \quad (t,x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}, \\ u_{|t\leq 0}(x) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^d_+, \end{cases} \tag{1}$$

où l'opérateur hyperbolique $L(\partial)$ régit l'évolution de la solution u à l'intérieur du domaine et où la matrice B encode les conditions que l'on impose sur la trace de u sur le bord du domaine.

Après une présentation plus approfondie de ce genre de problème, on énoncera le théorème principal (Kreiss '70) sur le sujet qui établit l'équivalence entre une condition "algébrique" sur B (dîte condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme) et l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites (1).

Plutôt que de donner des éléments de preuve de ce théorème qui est d'une certaine technicité, on verra ensuite comment les outils de l'optique géométrique permettent de construire des solutions approchées du problème (1), et comment ces derniers permettent aussi d'énoncer une version "micro-locale" simplifiée de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme.