M2 Mathématiques fondamentales

ANNÉE 2022-2023

Le responsable du Master 2 Mathématiques fondamentales est

Tobias Schmidt `tobias.schmidt@univ-rennes1.fr`.

Les cours sont organisés en thématiques :

Au premier semestre, il faut valider 30 crédits ECTS dont 24 crédits en suivant quatre cours d'une même thématique ou en mixant plusieurs thématiques. Les 6 crédits restants correspondent à l'étude d'un texte, le séminaire. Au premier semestre, les cours sont des cours fondamentaux et nombre d'entre eux sont regroupés par paires au sens où l'un s'appuie sur l'autre comme prérequis, ou plus encore en est la suite.

Au second semestre, il faut valider 30 crédits ECTS dont 12 crédits en suivant deux cours parmi ceux proposés dans les différentes thématiques, voire dans un autre master. Ces cours sont par essence plus spécialisés. Les 18 crédits ECTS restants correspondent au cours de langue (3 ECTS) et au stage de recherche (15 ECTS).

Il est possible de suivre plus de cours que nécessaires. Il est également possible de valider des cours du master 2 partenaire de l'Université de Nantes (avec des frais de transport pris en charge par le Centre Henri Lebesgue) et de l'Université de Potsdam (cours en distance) et, sous réserve de validation préalable du responsable pédagogique, dans d'autres masters rennais.

Thématique « aléatoire »

Premier semestre.

* **Processus stochastiques** (6 ECTS) par Jean-Christophe Breton

L'objectif de ce cours est de donner une présentation concise mais rigoureuse de la notion d'intégrale stochastique par rapport aux semi-martingales continues, en portant une attention particulière au mouvement brownien, qui jouera le rôle de fil conducteur.

* **Calcul stochastique** (6 ECTS) par Arnaud Debussche

Ce cours fait suite à celui de *Processus stochastiques*. Le cours commence par l'étude de quelques outils fondamentaux du calcul stochastique (formule d'Itô, théorème de Girsanov, représentation de martingale) puis explore la notion d'équation différentielle stochastique.

* **Systèmes dynamiques et théorie ergodique** (6 ECTS) par Christophe Cuny

L'objet du cours portera sur les systèmes dynamiques donnés par une transformation T mesurable sur un espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$ dont il préserve la mesure μ. De tels systèmes abondent, les exemples typiques incluant les translations par un nombre irrationnel sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ou les éléments de $M_n(\mathbf{Z})$ agissant sur $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. L'objectif est d'étudier les propriétés statistiques de T^n quand $n \to \infty$. Les thèmes abordés seront : ergodicité, mélange, mélange fort ; théorèmes ergodiques ; unique ergodicité ; entropie.

* **Statistique des processus** (6 ECTS) par Nicolas Klutchnikoff

Ce cours traite de diverses procédures d'estimation pour des processus stochastiques à temps continu possédant des sauts. Nous considérons dans un premier temps les propriétés classiques des processus de comptage et de renouvellement, avant d'étudier plus en détail le processus de Poisson simple et ses généralisations comme les processus de Poisson inhomogènes et composés. Les processus de Markov à sauts purs sont également abordés d'un point de vue probabiliste et statistique. On donnera enfin pour terminer quelques méthodes d'estimation pour des modèles de solutions d'équations différentielles stochastiques.

* **Estimation paramétrique** (6 ECTS) par Lionel Truquet

Ce cours est centré sur la question de l'estimation dans les modèles paramétriques, c'est-à-dire lorsque la loi inconnue est décrite par un paramètre de dimension finie. Le cours commencera par une exposition des méthodes classiques d'estimation pour ce type de modèle. On discutera ensuite de notions permettant de comparer les estimateurs paramétriques, ainsi que leur optimalité. Une ouverture vers le cadre semi-paramétrique, dans le cadre de la statistique des valeurs extrêmes, sera présentée.

* **Estimation non paramétrique** (6 ECTS) par Marian Hristache

Dans ce cours, nous nous attachons à estimer des objets de dimension infinie tels qu'une densité de probabilité ou une fonction de régression. Le cours se décompose en trois parties. Nous passons tout d'abord en revue les méthodes principales d'estimation non-paramétrique telles que les méthodes à noyau, les estimateurs par projection et les méthodes de régularisation. Puis nous nous intéressons à l'optimalité des procédures et aux bornes indépassables de performance : c'est la théorie minimax. Enfin, en lien avec la théorie de l'apprentissage statistique, nous étudions des méthodes dites de sélection de modèles, permettant l'adaptation des estimateurs, ces derniers atteignants des vitesses optimales d'estimation sous diverses hypothèses sur les fonctions à estimer.

Second semestre.

* **Chemins rugueux** (6 ECTS) par Ismaël Bailleul

Un grand nombre de systèmes naturels sont décrits par des chemins à valeurs dans un espace de Banach ayant une dynamique décrite par des équations différentielles $\dot{y}_t = f(y_t)\dot{h}_t$. Une telle équation traduit le fait que l'accroissement infinitésimal du chemin y est proportionnel à l'accroissement d'un signal h qui le conduit. Les équations élémentaires correspondent au cas où $h_t = t$, mais de nombreuses situations requièrent de considérer le cas de signaux h pas même dérivables ; c'est typiquement le cas qui se présente dans l'étude des équations différentielles stochastiques, où h est une trajectoire de mouvement brownien.
Comment alors donner un sens à l'équation ci-dessus ? La théorie des chemins rugueux fournit un cadre optimal pour répondre à de telles questions, dont le cadre d'application va des systèmes contrôlés, déterministes ou stochastiques, à l'étude d'ÉDPs avec bruit aléatoire et au *machine learning* ! Ce cours sera aux deux tiers purement déterministe et pourra à ce titre intéresser également tous les étudiants du parcours *Analyse.*

* **Jeux à champ moyen** (6 ECTS) par Hu Ying

Les jeux à champ moyen décrivent l'évolution en temps continu d'un grand nombre d'agents interagissant entre eux. Introduits par Lasry et Lions, les modèles étudiés dans ce cours ont à voir avec divers problèmes d'optimisation, d'équations aux dérivées partielles (Hamilton–Jacobi, Fokker-Planck, *etc.*), d'analyse stochastique (équations différentielles stochastiques rétrogrades) ou de théorie des jeux.

* **Zéros de processus gaussiens** (6 ECTS) par Jurgen Angst et Guillaume Poly

Nous commencerons par introduire les concepts principaux des champs Gaussiens aléatoires et quelques inégalités fonctionnelles classiques (Slepian, Sudakov, Fernique, isopérimétrique..). Ensuite nous étudierons des critères de régularité de ces processus, loi du maximum sur un compact, la loi du nombre d'extrema locaux ou la loi du nombre de zéros (volume des zéros si d>1) par les formules de Kac-Rice ou encore le développement en chaos de Wiener. Diverses applications seront proposées : polynômes trigonométriques aléatoires, différents modèles de polynômes algébriques ("Kac", "Elliptiques", "Flat"..)

* **deux cours de statistique** (6 ECTS chacun) sont proposés **sur le campus de l'ÉNSAI** :
  ** *Fouille du web et traitement du langage*

Ce cours est une introduction à la collecte de données textuelles et au traitement automatique du language.

  ** *Analyse des données fonctionnelles*

Dans ce cours les étudiants apprennent les idées principales, la théorie associée et les routines numériques de l'analyse des données fonctionnelles.

Thématique « algèbre et géométrie »

Premier semestre.

* **Dynamique arithmétique I** (6 ECTS) par Serge Cantat

* **Dynamique arithmétique II** (6 ECTS) par Serge Cantat

Le cours (I et II) présentera des méthodes arithmétiques, analytiques et p-adiques pour la théorie des groupes et les systèmes dynamiques. Les applications concerneront — la dynamique des transformations polynomiales et les phénomènes “d'intersections improbables” ; — les groupes linéaires et l'alternative de Tits ; — la distribution et la croissance arithmétique des orbites de transformations algébriques (hauteur de Tate, extensions du théorème de Skolem, Mahler et Lech, etc).

* **Surfaces de Riemann** (6 ECTS) par Frank Loray

Après quelques rappels sur les variétés, revêtements, nous introduirons la notion de variétés complexes et fonctions holomorphes. Les surfaces de Riemann sont les variétés complexes connexes de dimension 1 (surfaces réelles équipées d'une structure complexe).
Nous donnerons des exemples :
- la sphère de Riemann et ses automorphismes,
- les tores complexes, automorphismes et classification,
- les courbes algébriques définies sur les complexes.

Nous détaillerons le cas des courbes elliptiques, et leur loi de groupe.
Nous aborderons (sans le démontrer) le théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe qui dit qu'une surface de Riemann admet pour revêtement universel le disque, le plan ou la sphère complexes. Nous verrons quelques conséquences.
Nous introduirons les notions de diviseur, de fibrés en droites et de groupe de Picard.
Nous introduirons les notions de faisceaux, et de cohomologie de Cech, pour arriver au théorème de Riemann-Roch.
Enfin, nous terminerons, si le temps le permet, par l'application d'Abel-Jacobi.

* **Géométrie algébrique** (6 ECTS) par Tobias Schmidt

Ce cours donne une introduction à la théorie des schémas. Les schémas sont les objets de base de la géométrie algébrique moderne, généralisant la notion de variété algébrique de plusieurs façons, telles que la prise en compte des multiplicités, l'unicité des points génériques et le fait d'autoriser des équations à coefficients dans un anneau commutatif quelconque. Parmi les sujets abordés sont :
schémas affines et leur topologie, théorie des faisceaux, espaces annelés et schémas, points et produis fibrés, l'espace projectif, modules quasi-cohérents, immérsions fermées, morphismes separés et propres.

* **Groupes et algèbres de Lie I** (6 ECTS) par François Maucourant & Barbara Schapira

Les mots clés de la première partie : définition des groupes et algèbres de Lie, exemples classiques ; représentations de sl(2,C) et sl(3,C) ; algèbres de Lie résolubles, nilpotentes, semi-simples ; sous-algèbres de Cartan.

* **Groupes et algèbres de Lie II** (6 ECTS) par François Maucourant & Barbara Schapira

Les mots clés de cette deuxième partie : systèmes de racines, groupe de Weyl, diagrammes de Dynkin ; liens entre algèbres de Lie réelles et complexes ; décomposition de Cartan ; lien entre groupes et algèbres de Lie ; retour sur les représentations.

Second semestre.

* **Géométrie des feuilletages sur les surfaces complexes** (6 ECTS) par Christophe Mourougane

Après avoir étudié les premières définitions et exemples de feuilletages holomorphes sur les variétés analytiques complexes, on construira des invariants locaux et globaux. Le but final sera de classifier les feuilletages holomorphes réguliers sur les surfaces spéciales. On suivra principalement le texte de Marco Brunella "Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes".

* **Systèmes dynamiques hyperboliques** (6 ECTS) par Sébastien Gouëzel

Les systèmes dynamiques hyperboliques sont l'exemple le plus simple (et le mieux compris) de systèmes dynamiques chaotiques : il s'agit de transformations sur un espace compact qui, en chaque point, dilatent uniformément une direction et contractent uniformément une direction supplémentaire. L'étude de ces transformations combine des arguments provenant de différents domaines des mathématiques (principalement géométrie, mais également analyse, probabilités, algèbre, combinatoire). On couvrira les propriétés fondamentales de ces systèmes (existence de variétés stables et instables, stabilité structurelle, recollement d'orbites, partitions de Markov), avant de s'intéresser à des théorèmes plus avancés : classification des difféomorphismes d'Anosov à homéomorphisme près, sur les tores et plus généralement sur les nilvariétés ; absolue continuité des feuilletages, ergodicité ; croissance du nombre d'orbites périodiques (théorème de Margulis).

* **Géométrie semi-riemannienne & calcul des variations** (6 ECTS) par Éric Loubeau

Le cours fournira un cadre commun aux géométries riemanniennes et lorentziennes en étudiant les notions classiques de géométrie semi-riemannienne : métriques semi-riemanniennes, transport parallèle, connexion, courbure, champs de Killing, géodésiques, *etc.* Il présentera en particulier le problème des géodésiques sous forme variationnelle. Pour conclure il discutera les applications harmoniques sur les variétés riemanniennes.

Thématique « analyse »

Premier semestre.

* **Théorie spectrale** (6 ECTS) par Zied Ammari

Ce cours est un introduction aux opérateurs non bornés, qui généralisent les matrices aux espaces de dimension infinie. On discutera de leur spectre, et on appliquera les résultats théoriques aux opérateurs différentiels (ou pseudo-différentiels), souvent issus de la physique.

* **Analyse microlocale** (6 ECTS) par Christophe Cheverry

Ce cours fait suite à celui de *Théorie spectrale*. Il a trait à l'étude des opérateurs pseudodifférentiels, qui sont une généralisation des opérateurs différentiels et permettent une résolution particulièrement agréable de certaines équations aux dérivées partielles linéaires. On se concentrera sur la version dite semiclassique, qui met bien en valeur les aspects géométriques, et permet des applications à la théorie spectrale des opérateurs de type Schrödinger.

* **Espaces de Sobolev & équations elliptiques** (6 ECTS) par Miguel Rodrigues

La première partie du cours concerne les espaces de Sobolev. On montrera les théorèmes d'injection de Sobolev dans le cas d'ouverts assez généraux. On étudiera les espaces fractionnaires et la théorie des traces. La deuxième partie sera consacrée aux équations aux dérivées partielles elliptiques. Le cas linéaire sera d'abord considéré, avec différents types de conditions aux limites. Enfin, des techniques adaptées aux équations elliptiques non-linéaires seront introduites (méthodes de Galerkin, de point fixe, *etc.*).

* **Équations hyperboliques** (6 ECTS) par Vincent Duchêne

Ce cours fait suite à celui intitulé *Espaces de Sobolev & équations elliptiques*. Il s'agit d'une introduction à l'analyse des équations aux dérivées partielles d'évolution, menée sur l'exemple des systèmes hyperboliques quasi-linéaires. L'essentiel du cours est consacré aux lois de conservation scalaires non linéaires, et en étudie à la fois les solutions fortes et entropiques, mais il aborde aussi les systèmes hyperboliques linéaires. En chemin, pour considérer les limites de viscosité évanescente, nous verrons quelques rudiments sur les systèmes paraboliques semi-linéaires.

* **Méthode des élements finis** (6 ECTS) par François Castella et Eric Darrigrand

Ce cours est un pendant numérique du cours *Espaces de Sobolev & équations elliptiques*. Après des rappels sur les équations elliptiques linéaires, le cours aborde l'approximation des solutions associées par la méthode des éléments finis. L'élaboration et l'analyse de ces méthodes sera abordé en dimension arbitraire. S'en suit une mise en œuvre des éléments finis selon un algorithme générique basé sur la formulation variationnelle. Le cours inclut un travail pratique à réalisé en utilisant un des langages de programmation courants au choix (`Matlab`, `Octave`, `Scilab`, `Python`,...).

* **Numérique du transport** (6 ECTS) par Benjamin Boutin

Ce cours est le pendant numérique du cours *Équations hyperboliques.* Une première partie portera sur l'analyse des schémas de différences finies. Les problématiques de stabilité et de consistance pour de tels schémas considérés en domaine infini ou périodique ainsi qu'en domaine borné seront abordées. Dans un deuxième temps, l'approximation des solutions faibles entropiques de lois de conservation hyperboliques non-linéaires sera étudiée via la construction et l'analyse de la méthode des volumes finis. Des développements récents de tels schémas seront abordés.

Second semestre.

* **Equations d'ondes non linéaires et relativité générale** (6 ECTS) par Léo Bigorgne

Dans un premier temps, nous étudierons des propriétés d'existence locale pour une classe d'équations d'ondes non linéaires. Cela nous permettra de montrer que les équations d'Einstein, qui peuvent être reformulées sous la forme d'un système d'équations d'ondes quasi-linéaires, sont bien posées. La seconde partie du cours concernera l'étude des solutions à données petites d'équations simplifiées intervenant dans la démonstration de la stabilité de l'espace-temps de Minkowski.

* **Méthodes numériques pour les équations cinétiques** (6 ECTS) par Nicolas Crouseille

Dans ce cours, il s'agira d'étudier les équations cinétiques et leur approximation numérique. Ces équations microscopiques permettent de décrire un système composé d'un grand nombre de particules et admettent de nombreuses applications en physique des plasmas, biologie, astrophysique,... Dans un premier temps, des aspects de modélisation seront abordés. Certaines propriétés des équations cinétiques seront mises en évidence et à partir de développements asymptotiques (par rapport à un petit paramètre dans l'équation), des modèles macroscopiques connus (comme les équations d'Euler ou de diffusion) seront obtenus. Dans un second temps, plusieurs méthodes numériques adaptées aux équations cinétiques seront construites et analysées. En particulier, des méthodes dites multi-échelles, permettant de faire le lien au niveau discret entre les descriptions microscopique et macroscopique seront présentées.

* **Equations structurées en biologie : modélisation et analyse mathématique** (6 ECTS) par Vuk Milisic

Dans un premier temps on donne des exemples d'équations auxquelles on s'intéressera en insistant sur les aspects de modélisation qui permettent de les écrire. On donne quelques résultats classiques dans la théorie des équations intégrales de Volterra. On présente ensuite les équations de renouveau et les méthodes d'entropie généralisée. Dans un dernier chapitre on introduit les modèles d'adhésion dans le cadre de la motilité cellulaire et montre quelques résultats mathématiques dans ce contexte.