# Peut-on prédire la stabilité des galaxies ?

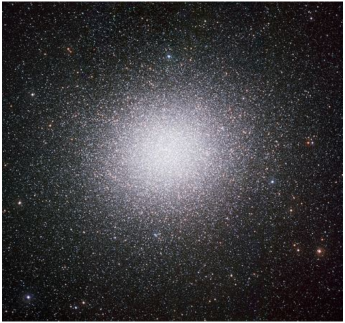
Florian Méhats

Université de Rennes 1, IRMAR, équipe INRIA IPSO

*Inauguration du Centre Lebesgue, 23 novembre 2012*

## Question générale

Essayer de prédire le comportement en temps long d'un ensemble d'étoiles (vues ici comme un système de particules autogravitantes)



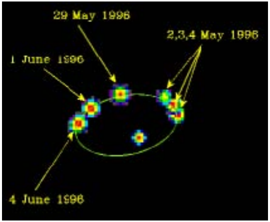
*amas globulaire Omega du Centaure*
$10^7$ étoiles

*galaxie elliptique M87*
$10^{11}$ étoiles

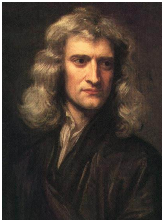
## Question mathématique

Une fois les équations du modèle choisies, démontrer la stabilité dynamique d'états stationnaires.

*Depuis Newton, le comportement de deux corps massifs s'attirant mutuellement est bien connu.*




*étoile binaire $\zeta^1$ Ursae Majoris*



### Le problème à 2 corps

Il s'agit de résoudre deux équations différentielles sur les positions $x_1(t) \in \mathbb{R}^3$ et $x_2(t) \in \mathbb{R}^3$ des deux corps au cours du temps $t$ :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -Gm_2 \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^3} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -Gm_1 \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|^3}$$

*La connaissance de quantités invariantes au cours du temps suffit à rendre le problème à 2 corps complètement prédictible.*

- Ce système possède plusieurs invariants : quantité de mouvement, moment cinétique $L$, énergie $E$.
- Grâce à ces invariants, on peut réduire le nombre d'inconnues et le problème se résume à quelques calculs d'intégrales.
  On dit qu'il est intégrable.
- Si $E < 0$, dans le référentiel suivant le centre de masse et dans un plan perpendiculaire à $L$, les deux corps suivent des trajectoires périodiques sur des ellipses dont les paramètres dépendent continûment des données initiales.

**Stabilité de la solution d'énergie négative**

Si on perturbe la donnée initiale, la trajectoire de la solution reste pour tout temps une perturbation de la trajectoire précédente.

*Si on ajoute un troisième corps au système, tout se complique !*

**Le problème à N corps pour $N \geq 3$**

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -G \sum_{j \neq i} m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, N$$

Comme l'a montré Poincaré, ce système n'est plus intégrable dès $N > 2$, en fait il est chaotique !

On peut construire de nombreuses solutions particulières, mais il est sans espoir de montrer leur stabilité.


Il faut changer le point de vue, changer de modèle mathématique.

*On va changer de point de vue et passer à une description statistique du système.*

Il est illusoire de décrire $10^7$ étoiles individuellement. On va considérer le système d'étoiles comme un gaz : passage du discret au continu.

Le système d'étoiles sera entièrement décrit par sa fonction de distribution $f(t, x, v)$, définissant la densité de "particules" ayant la vitesse $v \in \mathbb{R}^3$ à la position $x \in \mathbb{R}^3$.

**Le problème à N corps, de N=2 à N=$\infty$**

Le procédé consistant à obtenir l'équation d'évolution sur $f$ à partir du problème à N corps (formellement, on fait $N \to +\infty$) s'appelle "limite champ moyen" (et n'est pas complètement compris mathématiquement...).

Passage d'un système dynamique à des équations aux dérivées partielles (EDP) appelées système de Vlasov-Poisson.

*Les étoiles se déplacent dans un champ gravitationnel moyen qu'elles créent elles-mêmes.*

### Le système de Vlasov-Poisson

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0,$$

$$\phi_f(t,x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{G}{|x - x'|} f(t, x', v')\, dx'\, dv.$$

Une "EDP non linéaire" qui rend compte du mouvement de particules dans le champ de forces $-\nabla_x \phi_f$, généré lui-même par les particules selon la loi de Newton.

*Note : ce système est devenu célèbre récemment avec le travail de C. Mouhot et C. Villani sur l'amortissement de Landau.*

*Examinons quelles sont les quantités invariantes au cours du temps, réminiscentes du problème à N corps à l'origine du système.*

- La masse $\int_{\mathbb{R}^6} f(t,x,v)\,dxdv$.
- La quantité de mouvement $\int_{\mathbb{R}^6} v\,f\,dxdv$.
- L'énergie totale = énergie cinétique (positive) + énergie potentielle (négative)

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f\,dxdv - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_f|^2\,dx.$$

- Toutes les fonctionnelles dites de Casimir (sortes d'entropies généralisées)

$$\int_{\mathbb{R}^6} \mathcal{C}(f)\,dxdv$$

où $\mathcal{C}$ est une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}_+$.

*Le système Vlasov-Poisson admet de nombreux états d'équilibre...*
*Formulons notre problème de stabilité.*

Soit $F$ un profil d'une seule variable réelle. Alors une fonction de distribution de la forme

$$f(x,v) = F\left(\frac{1}{2}|v|^2 + \phi_f(x)\right)$$

est automatiquement une solution de Vlasov-Poisson qui est indépendante du temps.

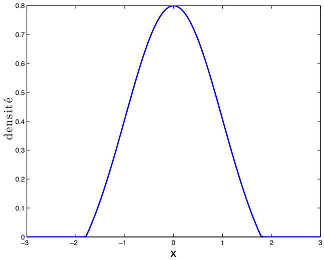
**La question posée : sur quels critères choisir le profil ?**

Parmi ces solutions stationnaires, lesquelles sont stables ?
Autrement dit, si on part initialement proche de $f$, est-ce qu'on reste "éternellement" proche ?

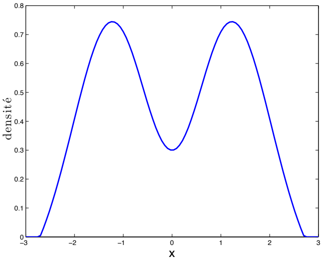
## Réponse partielle (Lemou-Méhats-Raphaël, *Invent. Math. 2012*)

*Si la fonction de profil $F$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ est décroissante (et assez régulière), alors il y a stabilité (à invariance Galiléenne près).*

Deux exemples de tracés de densités $\int_{\mathbb{R}^3} f(x,v)dv$ :




*stable*

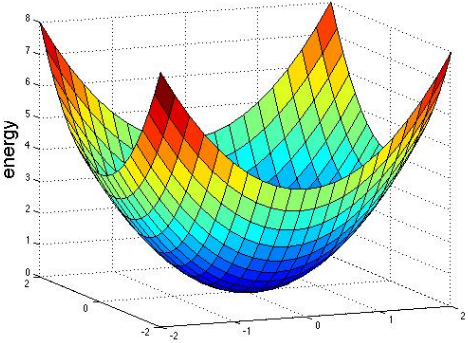



*stable ou instable*

*Dans la suite de l'exposé, on va expliquer un ingrédient de la preuve. Le système est non intégrable (pas assez d'invariants), donc il faut employer une stratégie plus souple.*

## Technique dite variationnelle

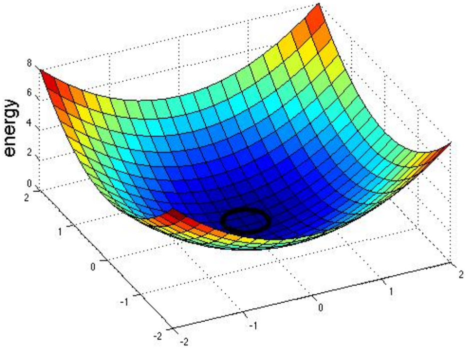
*Si l'état d'équilibre considéré correspond à un minimum local de l'énergie, alors on peut en déduire un résultat de stabilité.*




La solution $f(t)$ devra évoluer sur une ligne de niveau d'énergie constante, donc restera au voisinage de l'état d'équilibre.

Technique dite variationnelle

*Si l'état d'équilibre considéré correspond à un minimum local de l'énergie, alors on peut en déduire un résultat de stabilité.*



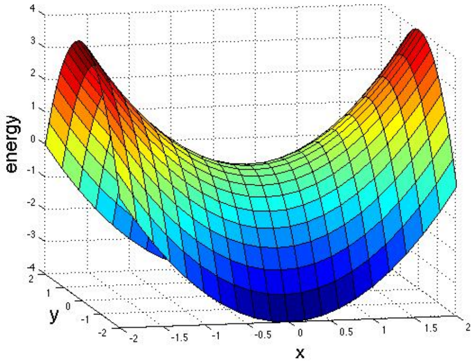

La solution $f(t)$ devra évoluer sur une ligne de niveau d'énergie constante, donc restera au voisinage de l'état d'équilibre.

## Rappel de la forme de l'énergie

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f \, dxdv - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_f|^2 \, dx.$$

Par un simple argument de changement d'échelle, on voit qu'aucun état stationnaire ne peut être minimiseur local de l'énergie.

Situation d'un col : la trajectoire peut s'échapper en restant sur une ligne de niveau

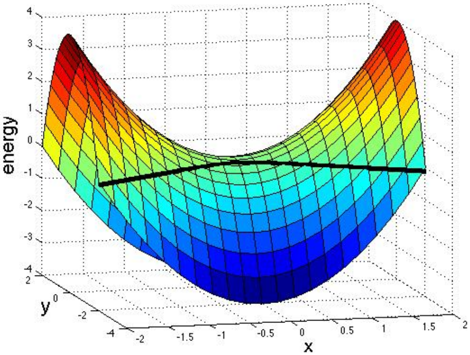


## Rappel de la forme de l'énergie

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f \, dxdv - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_f|^2 \, dx.$$

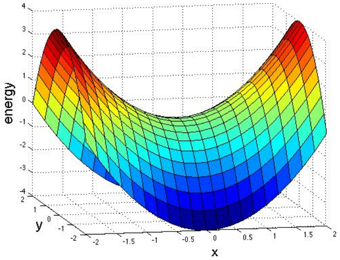
Par un simple argument de changement d'échelle, on voit qu'aucun état stationnaire ne peut être minimiseur local de l'énergie.

Situation d'un col : la trajectoire peut s'échapper en restant sur une ligne de niveau

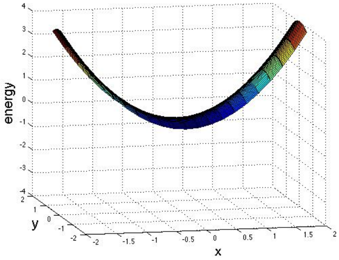


## Problèmes variationnels sous contraintes

*Si on ajoute des contraintes supplémentaires au problème, des cols peuvent devenir des minima locaux.*




*sans contrainte*




*ici $y$ est contraint à rester proche de $y_0$*

### Le retour des invariants

*La méthode variationnelle peut être sauvée... en se souvenant que le système de Vlasov-Poisson admet des invariants qui rigidifient le problème.*

### La nouvelle approche, qui permet d'aboutir au résultat

En prenant en compte toutes les fonctionnelles de Casimirs (donc une infinité non dénombrable de contraintes !), on peut démonter que chaque état d'équilibre considéré est bien un minimiseur local de l'énergie.

## Pour conclure, quelques éléments à retenir

- Importance du choix du modèle mathématique : Vlasov-Poisson plutôt que le problème à N corps, pour une description statistique plutôt que particule par particule.
- Choix d'une méthode variationnelle par minimisation d'énergie : pallie le caractère non intégrable de l'équation.
- Prise en compte des invariants : l'analyse mathématique bénéficie des bonnes propriétés physiques du problème.

## Les limites de la réponse apportée

- Pour l'instant, ne sont traités que les états stationnaires à symétrie sphérique (pas les galaxies elliptiques générales, ni les galaxies spirales,... )
- La stabilité est prouvée strictement dans le cadre du modèle mathématique choisi. Si on rajoute de la phénoménologie physique (relativité, dissipations, ...), il faut refaire le travail.