Comment représenter les contraintes ?

Loïc Le Marrec
loic.lemarrec@univ-rennes1.fr

mardi 1er mars 2016

La loi de Hooke : *ut tensio sic vis*

Robert Hooke

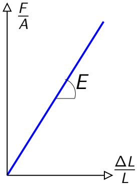
1635-1703
expérimentateur britannique

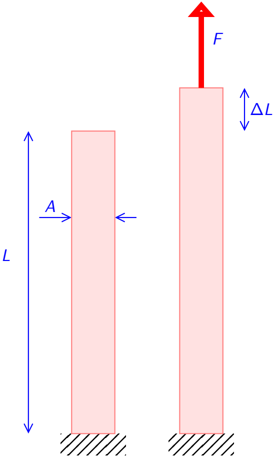
ΔL allongement

F force

$$\frac{F}{A} = E\,\frac{\Delta L}{L}$$

E module de Young





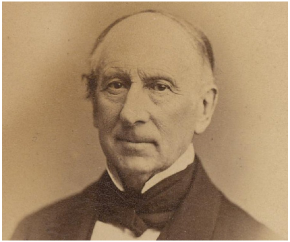
$\Rightarrow$ La contrainte $\dfrac{F}{A}$ est homogène à une pression.

Tenseur des contraintes de Cauchy σ

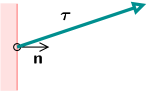
Contrainte $\boldsymbol{\tau}$ appliquée sur une surface orientée suivant $\mathbf{n}$:

- *longitudinale* : pression, traction
- *transverse* : cisaillement

Augustin Louis Cauchy



1789-1857
mathématicien français



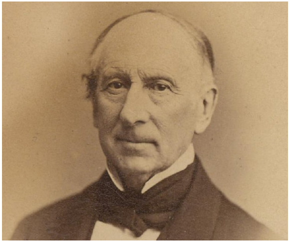
$$\boldsymbol{\tau} = \sigma \cdot \mathbf{n}$$

Tenseur des contraintes de Cauchy σ

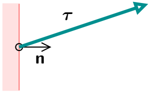
Contrainte $\boldsymbol{\tau}$ appliquée sur une surface orientée suivant $\mathbf{n}$:

- *longitudinale* : pression, traction
- *transverse* : cisaillement

Augustin Louis Cauchy

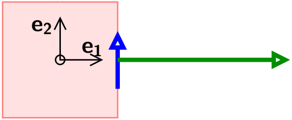


1789-1857
mathématicien français



$$\boldsymbol{\tau} = \sigma \cdot \mathbf{n}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

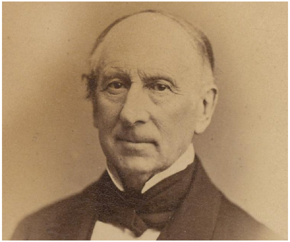


Tenseur des contraintes de Cauchy σ

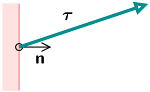
Contrainte $\boldsymbol{\tau}$ appliquée sur une surface orientée suivant $\mathbf{n}$:

- *longitudinale* : pression, traction
- *transverse* : cisaillement

Augustin Louis Cauchy

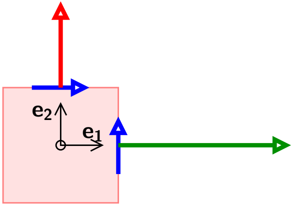


1789-1857
mathématicien français



$$\boldsymbol{\tau} = \sigma \cdot \mathbf{n}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



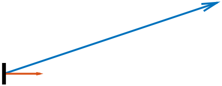
Le tenseur des contraintes est symétrique

Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$ en un point du milieu élastique (en 2D)



Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

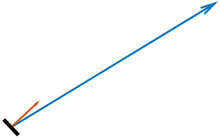
La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

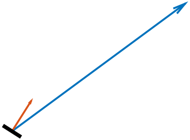


Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$ en un point du milieu élastique (en 2D)

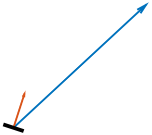


Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

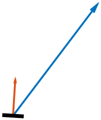


Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)



Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

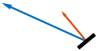
La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)



Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma\mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

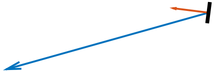
La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\boldsymbol{\tau} = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

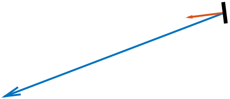


Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)



Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

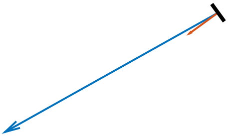
La contrainte $\tau = \sigma\mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma\mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

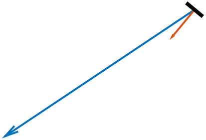


Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

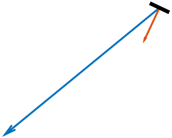


Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

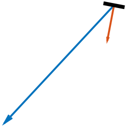


Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

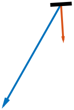


Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)



Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

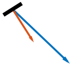
La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)



Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma\mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\boldsymbol{\tau} = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

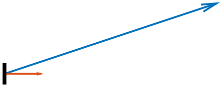
La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\tau = \sigma \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 2D)

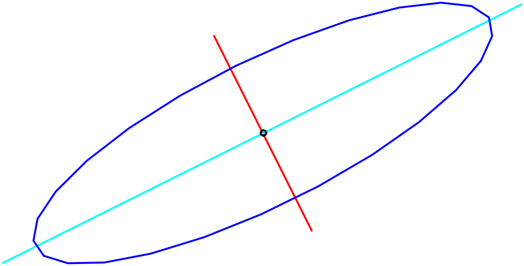


Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

La contrainte $\boldsymbol{\tau} = \sigma\mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$ en un point du milieu élastique (en 2D)



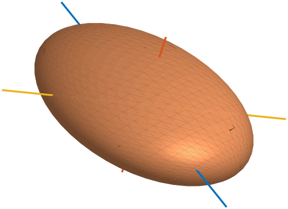
La contrainte pointe sur une **ellipse** dont les axes sont les deux directions principales du tenseur des contraintes σ

Ellipsoïde de Lamé

Gabriel Lamé

1795-1870
mathématicien français

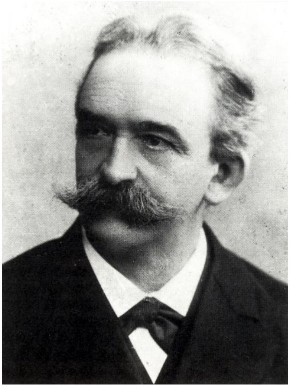
La contrainte $\tau = \sigma\mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$
en un point du milieu élastique (en 3D)



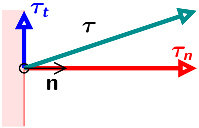
La contrainte pointe sur un **ellipsoïde** dont les axes sont les trois directions principales du tenseur des contraintes σ

Tri-cercle de Mohr

Christian Otto Mohr



1835-1918
ingénieur mécanicien allemand



$$\boldsymbol{\tau} = \sigma \mathbf{n}$$

Constat mécanique:

La composante de cisaillement $\boldsymbol{\tau_t}$ est très discréminante élastiquement

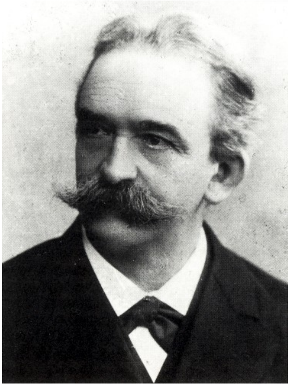
$\Rightarrow$ analysons séparément les deux composantes

$$\boldsymbol{\tau_n} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$$

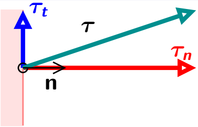
$$\boldsymbol{\tau_t} = \|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau_n}\|$$

Tri-cercle de Mohr

Christian Otto Mohr

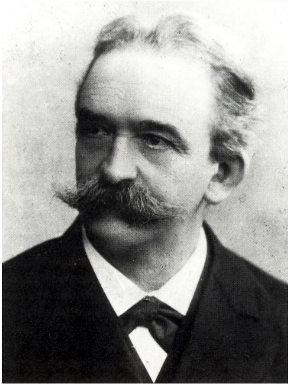


1835-1918
ingénieur mécanicien allemand

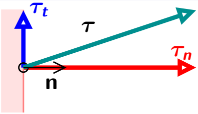


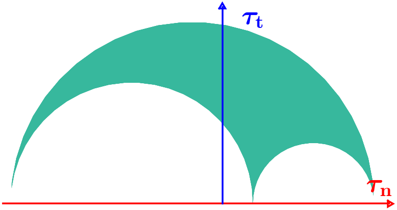
Tri-cercle de Mohr

Christian Otto Mohr



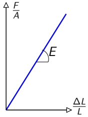
1835-1918
ingénieur mécanicien
allemand



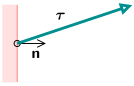


Conclusion : les représentations de la contrainte

Hooke 1678

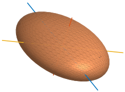


Cauchy 1822

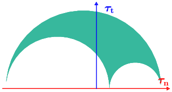


$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Lamé 1833



Mohr 1882



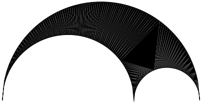
- Un concept scientifique peut être représenté de bien des manières, chacune complémentaire.

$\Rightarrow$ C'est l'un des rôles des mathématiques

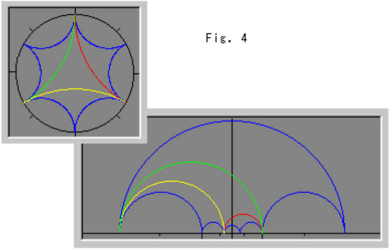
Le tri-cercle de Mohr est un triangle !

Henri Poincaré

1854-1912
mathématicien français



Tri-cercle de Mohr



Triangles idéaux sur le disque et demi-plan de Poincaré

Question personnelle : comment expliquer ce lien ?